



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

**Vincoli sull'energia oscura da
misure dell'effetto Sachs-Wolfe
integrato**

Tesi di Laurea Specialistica in Astronomia e Astrofisica

Anno Accademico 2008-2009

Relatore:

Prof. Alessandro Melchiorri

Laureando:

Paolo Fermani

Indice

Introduzione	V
1 Il modello cosmologico standard	3
1.1 Il principio cosmologico	3
1.2 L'universo si espande	4
1.3 Cenni alla teoria della relatività generale	5
1.4 La metrica	8
1.5 Redshift e distanze	10
1.6 Equazioni per l'universo	13
1.7 La costante cosmologica	16
1.7.1 Problemi della costante cosmologica	18
1.8 Le componenti dell'universo	18
1.8.1 Parametri cosmologici	19
1.8.2 Le densità	21
1.8.3 L'evoluzione del fattore di scala	23
1.8.4 Parametro di decelerazione	25
1.9 Termodinamica dell'universo in espansione	26
1.9.1 I fotoni	27
1.9.2 Fondo cosmico di neutrini	28
1.9.3 Nucleosintesi primordiale degli elementi leggeri	32
1.10 La materia oscura	38
1.11 Problemi del modello cosmologico standard	40
1.12 L'inflazione	41
1.12.1 La dinamica dell'inflazione	42
1.12.2 La soluzione dei problemi	44
2 La radiazione cosmica di fondo	47
2.1 Epoche caratteristiche	47
2.2 Proprietà della CMB	50
2.2.1 Il satellite COBE	51
2.3 Le anisotropie della CMB	52

2.3.1	La teoria lineare	53
2.3.2	Le perturbazioni al fluido foto-barionico	56
2.4	Analisi statistica delle anisotropie della CMB	60
2.5	Anisotropie primarie	64
2.5.1	La dinamica del fluido foto-barionico	66
2.6	Anisotropie secondarie	73
2.7	Dipendenza dello spettro dai parametri cosmologici	76
2.8	Cenni alla polarizzazione della CMB	77
3	L'effetto Sachs-Wolfe integrato	83
3.1	L'effetto Sachs-Wolfe integrato	83
3.2	La correlazione temperatura-materia	87
3.2.1	Spettro di cross-correlazione temperatura-galassie	89
3.2.2	Lo spettro di cross-correlazione al variare dei parametri cosmologici	94
3.3	Spettri di autocorrelazione	100
3.4	Il rapporto segnale rumore teorico	101
3.5	Funzione di distribuzione di una survey di galassie	101
3.6	Il programma CMBCROSSFAST	103
3.6.1	La configurazione migliore	104
3.7	Set di dati utilizzati	107
3.7.1	LSST	107
3.7.2	WMAP	108
3.7.3	Planck	110
4	Analisi dei dati e risultati	113
4.1	Il formalismo per l'analisi dei dati	113
4.1.1	La funzione di verosimiglianza della CMB	116
4.2	La matrice di Fisher	117
4.2.1	La matrice di Fisher per la CMB	119
4.3	Il modello teorico fiduciale	122
4.3.1	Modelli di energia oscura	123
4.3.2	Il calcolo delle derivate	124
4.4	Il calcolo delle matrici di covarianza	125
4.4.1	La matrice di covarianza dell'ISW	126
4.4.2	La matrice di covarianza della CMB	127
4.5	Vincoli sui parametri cosmologici	128
4.5.1	Risultati e discussione	130
	Conclusioni	139

<i>INDICE</i>	III
Indice delle figure	146
Indice delle tabelle	147
Bibliografia	148

Introduzione

Grazie allo sviluppo tecnologico che ha permesso l'affermarsi di nuove tecniche di osservazione, si è potuto procedere speditamente nello sviluppo della cosmologia: quella branca della scienza che si occupa della descrizione di com'era l'universo nel passato, di come è nel suo presente e che tenta di predirne l'evoluzione futura. L'incremento delle ipotesi cosmologiche si è avuto con la pubblicazione da parte di Albert Einstein della sua teoria della relatività generale (1916) [86]. A partire da questa, Einstein sviluppò un modello di universo statico che però non risultava stabile. Per questo egli introdusse una costante cosmologica per far sì che l'universo rimanesse stabile e non andasse incontro a collassi. Questa costante si rivelò inutile dopo che Hubble nel 1929 osservò la recessione delle galassie, dalla quale dedusse correttamente che l'universo era in espansione; circostanza già intuita da Friedmann nel 1922. Da allora numerosi e decisivi sono stati gli sviluppi teorici e osservativi che hanno portato alla nascita del modello cosmologico standard dell'universo, descritto da una metrica detta di Friedmann-Robertson -Walker (FRW). Nel 1965 Penzias e Wilson scoprendo la radiazione cosmica di fondo (CMB) confermarono il modello detto del Big Bang caldo [32]: da una nube di gas caldo ed estremamente denso ha avuto origine tramite una grande esplosione (Big Bang) ed un successivo raffreddamento l'universo in cui noi oggi viviamo, con tutte le sue strutture, dal più piccolo asteroide agli ammassi di galassie (cluster). Per risolvere i problemi insiti nel modello (piattezza dell'universo, isotropia della CMB in zone che non sono ancora entrate in contatto causale tra loro, l'origine delle anisotropie della densità in cui si sono formate le strutture) negli anni 80 fu introdotto (da Guth) un modello detto inflazionario [58] che postulava un'espansione esponenziale dell'universo nei primi secondi della sua vita, in modo da spiegare tutti i paradossi del modello standard. Recenti osservazioni (CMB e Supernove Ia [24]) hanno riportato all'attenzione del mondo scientifico la costante cosmologica. Si è infatti scoperto che l'universo è in espansione accelerata, questo è impossibile se si considera un universo costituito solo da materia e radiazione. Poiché se ciò fosse vero l'universo, decelerando, si evolverebbe o verso un espansione

infinita o verso il Big Crunch (grande nuovo collasso guidato dall'attrazione gravitazionale indotta dalla materia). Tra l'altro la costante cosmologica trasforma un universo decelerato in uno accelerato. Questa costante può rappresentare il contributo di energia oscura [103], e può essere interpretata come l'energia del vuoto, anche se non si conosce ancora esattamente il suo significato fisico. Altri dati, che provengono dalla dinamica degli ammassi di galassie [31], ci dicono che la maggior parte della materia dell'universo non emette luce e non è quindi direttamente osservabile. Questa materia prende il nome di materia oscura [103], e rappresenta circa l'80% di tutta la materia esistente, mentre solo il 20% è costituito da materia ordinaria, barionica.

Il nostro lavoro si concentra sulle possibili tecniche per poter dare dei vincoli sull'energia oscura. Esistono, infatti, tutta una serie di evidenze osservative che comprovano che l'universo stia subendo un'espansione accelerata indotta da una componente di energia oscura. L'analisi dello spettro di potenza delle anisotropie della temperatura della radiazione di fondo cosmico a microonde (CMB) [88] combinato con i campioni di dati traccianti le strutture a larga scala (LSS), suggeriscono fortemente che, all'incirca il 70% dell'energia nell'universo, è in forma di energia oscura. Misure di distanza delle supernove Ia confermano queste evidenze, mostrando che le supernove ad alto redshift appaiono più fioche rispetto a come dovrebbero apparire se l'universo fosse dominato dalla materia che tutti conosciamo.

Un altro modo per mostrare tutto ciò è fornito dalla rivelazione dell'effetto Sachs-Wolfe integrato (ISW) attraverso la cross-correlazione CMB/LSS [10, 40, 57, 88, 47, 17, 89, 85], complementare ai dati delle supernove.

L'effetto ISW mostra anche la diminuzione nella crescita delle perturbazioni di densità (che daranno luogo alla formazione delle strutture cosmiche, come le galassie), che accade quando l'universo cessa di essere dominato dalla materia. I fotoni della CMB viaggiando verso di noi dalla superficie sulla quale si verifica l'ultima interazione con gli elettroni liberi del plasma primordiale (superficie di ultimo scattering), subiscono un blueshift od un redshift nell'entrare o uscire dalle buche di potenziale gravitazionali che incontrano lungo il loro cammino.

Durante la dominazione della materia, il potenziale gravitazionale rimane costante nel tempo, e i due contributi si cancellano esattamente; tuttavia, ogni qual volta ci si distacca da questa situazione, si riscontra una variazione temporale del potenziale, che comporta una variazione dell'energia dei fotoni. Il risultato è un'anisotropia aggiuntiva allo spettro di potenza della CMB: l'effetto ISW.

Rilevare l'effetto ISW da misure della CMB non è semplice poiché il suo segnale è circa dieci volte minore rispetto a quello delle anisotropie primarie, originate nell'ultima interazione prima della libera diffusione dei fotoni

CMB. Per rilevare questo debole segnale, calcoliamo la cross-correlazione tra le mappe di temperatura della CMB con la distribuzione locale della materia [19]. Infatti, le galassie sono adatte (perché si formano a basso redshift) a tracciare le buche di potenziale gravitazionali che causano l'effetto ISW, mentre sono completamente scorrelate con il restante segnale della CMB. Perciò l'operazione della cross-correlazione isola il segnale ISW da quello delle altre anisotropie. Sulle grandi scale angolari il segnale della cross-correlazione è dominato dall'effetto ISW, mentre alle piccole un contributo aggiuntivo viene dall'effetto Sunyaev-Zel'Dovich [99].

Nell'analisi che andremo a sviluppare distingueremo anche tra due modelli diversi di energia oscura.

La costante cosmologica Λ è il modello più semplice di energia oscura che da risultati compatibili con i dati esistenti. Anche se il modello cosmologico detto Λ CDM ha avuto successo, sussistono ancora dei problemi inerenti al suo uso. D'altra parte le osservazioni sono consistenti anche per un modello di energia oscura che evolve nel tempo. Stabilire se l'energia oscura sia costante nel tempo o da esso dipendente è uno dei temi più importanti della cosmologia moderna.

In un universo FRW l'energia oscura è completamente determinata dalla sua equazione di stato: w , data dal rapporto fra pressione e densità d'energia. Modelli con un $w = -1$ corrispondono a Λ , mentre un $w \neq -1$ corrisponde ad altri modelli, tra cui quelli di energia oscura che evolve nel tempo, e proprio sul porre dei vincoli su questi parametri, ma anche su altri, come quelli dei neutrini, che si è concentrato questo lavoro di tesi.

Nel primo capitolo descriveremo il modello cosmologico standard, che è alla base delle moderne teorie cosmologiche [93, 22, 58]. Partiremo dall'enunciazione del principio cosmologico, che stabilisce l'isotropia e l'omogeneità dell'universo, quindi vedremo quali sono le prime evidenze osservative che hanno posto il problema di un universo in espansione. A questo punto introdurremo brevemente la teoria della relatività generale di Einstein e da questa la metrica, detta di Friedmann-Robertson-Walker, che descrive l'universo. Per descriverne, invece, l'evoluzione abbiamo bisogno di conoscerne le componenti principali. Ad oggi l'universo sembra essere composto da materia, di cui una gran parte formata da materia oscura, cosiddetta perché non sappiamo da cosa sia formata; da una trascurabile parte di radiazione, in forma di neutrini e fotoni per la gran parte; e dall'energia oscura. Seguiremo quindi l'evoluzione dell'universo, e delle sue componenti, dal loro stato primordiale a quello attuale. Infine ci occuperemo dei problemi del modello standard e della possibile soluzione ad opera della teoria dell'inflazione.

Nel secondo capitolo tratteremo nel dettaglio la radiazione di fondo cosmico (CMB). Partiremo dalla definizione dell'epoca durante la quale si è formata, ne illustreremo poi le caratteristiche principali. Dopo una breve discussione sulla teoria delle perturbazioni scalari nel regime lineare, passeremo alla derivazione e alla spiegazione dello spettro di potenza delle anisotropie della temperatura della CMB [54]. Queste hanno origine dalle oscillazioni nel fluido composto di barioni e fotoni quando l'universo aveva solo 300000 anni di vita. Dopo uno studio in cui esamineremo le anisotropie primarie e secondarie dello spettro, vedremo come questo dipende dai parametri cosmologici e come questi possano essere misurati [81]. Accenneremo poi brevemente alla polarizzazione, divisa in modi E e modi B, della CMB ed al suo spettro.

L'analisi delle varie anisotropie dello spettro della CMB ci darà l'occasione di introdurre l'effetto Sachs-Wolfe integrato (ISW) [95], a cui è dedicato tutto il terzo capitolo. Definiamo quindi i due tipi di effetto early e late. L'unico modo di distinguere questo effetto, molto più piccolo rispetto alle altre anisotropie della CMB, dette primarie, è effettuare una cross-correlazione tra lo spettro di potenza della CMB e una funzione di distribuzione di un dato campione di galassie (nel nostro caso quella del telescopio LSST [69]). A questo scopo, ci soffermeremo sui calcoli della correlazione temperatura-galassie e galassie-galassie [73]. I set di dati della CMB che useremo saranno quelli dei satelliti WMAP e Planck. Nel dettaglio [78] vedremo come poter suddividere la funzione di distribuzione in bin centrati a redshift diversi così da poter migliorare la correlazione e la capacità di vincolare i parametri da cui dipende lo spettro dell'ISW. Per concludere, mostreremo come cambia la forma di questo spettro al variare dei parametri cosmologici di maggiore interesse per la nostra analisi.

Il quarto capitolo è incentrato totalmente sui risultati da noi ottenuti. Per prima cosa introdurremo il formalismo necessario al trattamento dei dati. Useremo il metodo della matrice di Fisher per porre dei vincoli sui parametri cosmologici. Al fine di ottenere gli spettri di cross-correlazione useremo una versione modificata del programma CMBFAST: CMBCROSSFAST [68], che abbiamo provveduto a modificare per i nostri fini. Invece per calcolare la matrice di Fisher abbiamo costruito un programma scritto in linguaggio fortran 77 che fornisce gli errori ad una deviazione standard per i parametri cosmologici presi in esame. La procedura consiste, una volta ottenuti gli spettri dell'ISW per i diversi parametri e per tutti i bin in cui è suddivisa la funzione di distribuzione di galassie (che usiamo nella correlazione) e la larghezza in redshift dei bin stessi, del calcolo delle derivate degli spettri ISW. Fatto ciò, restano da calcolare gli errori sugli spettri, sia dell'ISW che della

CMB, che entrano nella matrice di covarianza: parte essenziale della matrice di Fisher. In particolare la nostra attenzione si è rivolta sui parametri caratteristici dell'energia oscura (il parametro dell'equazione di stato w_0 oppure di un'equazione di stato dipendente dal tempo w_a e sul logaritmo della velocità del suono nell'energia oscura), ma otterremo dei vincoli anche sulle altre componenti dell'universo. I risultati saranno visualizzati come livelli di confidenza nel piano dei parametri.

Capitolo 1

Il modello cosmologico standard

In questo capitolo [93] descriviamo il modello cosmologico attualmente considerato il più attendibile per spiegare e riprodurre i dati disponibili delle osservabili astrofisiche. Alla base di questo modello sta il *principio cosmologico*. Da questa prima assunzione possiamo poi aggiungere, grazie all'uso della relatività generale [86] e delle equazioni di Einstein in particolare, tutte le componenti che verranno a formare il modello noto ai più come Λ CDM. Cominceremo dapprima a parlare delle evidenze osservative che hanno portato alla formulazione del modello e quindi a spiegarne le caratteristiche fondamentali che sono riassunte nell'acronimo soprascritto.

1.1 Il principio cosmologico

Nei primi anni del XX secolo poco o nulla si conosceva della distribuzione della materia nell'universo ed ancor meno della sua metrica o forma o composizione. Friedmann fu il primo a trovare le soluzioni delle equazioni di Einstein per una distribuzione omogenea di materia, ma non ipotizzò il principio cosmologico. Dunque in assenza di dati osservativi certi e volendo provare a creare un modello semplice per descrivere il nostro universo, che potesse servire come base per teorie geometriche e matematiche, si ricorse, alla fine degli anni '40, per primi da parte di Gamow e Dicke, alla formulazione del principio cosmologico. Formulazione che si sarebbe poi rivelata, grazie alla definizione di nuove tecniche che hanno portato ad uno sviluppo incredibile delle nostre conoscenze sull'universo, corretta.

Il principio afferma che l'universo è omogeneo e isotropo su larga scala. Ciò

vuol dire che al suo interno non esistono posizioni (ricalcando in questo il *principio copernicano*) o direzioni privilegiate. I concetti di omogeneità ed isotropia soprattutto ci sembrano strani rapportati alla nostra percezione quotidiana, visto che osserviamo stelle, galassie ed altre conformazioni separate da grandi vuoti; uno scenario completamente anisotropo ed disomogeneo! Ma è per questo che si fa riferimento nel principio alle grandi scale, e per grandi si intende sopra ≈ 100 Mpc (cioè qualcosa come 3×10^{18} km).

Dunque all'incirca sopra i 100 Mpc l'universo ci appare isotropo dal nostro punto dello spazio. Ma l'isotropia in un dato punto dello spazio, in combinazione col principio cosmologico, implica l'isotropia in qualsiasi punto dello spazio, e l'isotropia in qualsiasi punto implica anche l'omogeneità dell'universo: l'universo è omogeneo ed isotropo e non ha un centro.

1.2 L'universo si espande

Prendiamo uno spettro di una galassia, ed esaminiamo una riga di assorbimento. In un laboratorio sulla Terra questa riga avrà una lunghezza d'onda λ_{em} mentre la lunghezza d'onda che osserviamo per la stessa riga in una galassia λ_o sarà generalmente diversa. Definiamo ora una quantità che è di fondamentale importanza per la cosmologia: il *redshift*. Diciamo che una galassia ha un dato redshift z dato dalla formula:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \quad (1.1)$$

C'è da dire che alcune galassie mostrano uno $z < 0$ cioè un *blueshift* indotto dai loro moti propri, ma la quasi totalità delle galassie mostra uno spostamento verso il rosso delle righe spettrali ($z > 0$). Nel 1929 Hubble misurò redshift e distanze di un campione di galassie e sistemò i punti su un diagramma redshift-distanze. Trovò così la relazione che porta il suo nome:

$$v = cz = H_0 d \quad (1.2)$$

Questa è la *legge di Hubble*. Hubble la interpretò come uno spostamento Doppler gravitazionale. Le galassie, tanto più quanto sono distanti da noi, recedono. Questa regressione è indotta dalla loro velocità radiale v . Nella formula appare una costante: la costante di Hubble, che ha un valore accuratamente misurato pari a $(H_0 = 71.9 \pm 2.6)$ km/s/Mpc [37][53]. In base alla legge, le galassie si allontanano da noi e le une dalle altre sempre di più in base alla distanza. C'è da dire che in realtà Hubble osservò questo andamento esaminando un campione di galassie molto ravvicinate tra loro che

mostravano tutte un redshift indotto però dai rispettivi moti propri; dunque fu solo per caso che si considerò la possibilità di essere in un universo omogeneo ed isotropo in espansione.

Interessante, ai fini del modello che andiamo a costituire, è notare che se oggi le galassie si stanno allontanando tra di loro, ci deve essere stato un tempo in cui erano vicine. In assenza di forze esterne la velocità di due galassie, distanti d , sarà costante, per cui ad un tempo:

$$t_0 = \frac{d}{v} = \frac{d}{H_0 d} = H_0^{-1} \quad (1.3)$$

queste erano in contatto. Il tempo $t_0 = H_0^{-1}$ è detto *tempo di Hubble*, che per il valore della costante di Hubble riportato, da un tempo $t_0 = (13.69 \pm 0.13)$ Gyr [33]. Quindi 14 miliardi di anni fa tutte le galassie erano costrette in uno spazio piccolissimo. In sostanza il tempo di Hubble è una stima dell'età dell'universo, confermata anche dall'età delle stelle più antiche, che risulta compatibile. E' questa una prima schematizzazione della teoria del big bang, secondo la quale l'universo si è evoluto da un volume iniziale estremamente piccolo e denso ad uno attuale più rarefatto ed enorme.

Così come abbiamo ricavato una stima dell'età dell'universo, la legge di Hubble ci può essere ancora utile nel definire una scala di distanze interesse cosmologico: la massima distanza che un fotone può percorrere dal tempo di Hubble ad oggi, detta *distanza di Hubble*. Questa distanza massima è pari a:

$$d_H(t_0) = \frac{c}{H_0} = (4300 \pm 400) Mpc \quad (1.4)$$

Riprenderemo tutti questi argomenti una volta che avremo una geometria per l'universo.

1.3 Cenni alla teoria della relatività generale

Siccome la forza più importante su scale di interesse cosmologico è la gravità, occorre specificare alcuni concetti della teoria della relatività generale di Einstein [58]. Nella relatività speciale, l'intervallo invariante tra due eventi di coordinate (t, x, y, z) e $(t+dt, x+dx, y+dy, z+dz)$ è definito dall'espressione $ds^2 = (cdt)^2 - (x^2 + dy^2 + dz^2)$, con ds invariante sotto una trasformazione di coordinate. Questa è l'espressione dello spazio-tempo piatto di Minkowski in coordinate cartesiane. Il cammino di un raggio di luce è dato da

$ds = 0$. Invece il cammino di una particella materiale tra due eventi è tale che l'integrale sul suo cammino sia stazionario:

$$\partial \int_{\text{cammino}} ds = 0 \quad (1.5)$$

cioè la particella percorre la minima distanza tra due punti: una retta. Tutto ciò si applica al moto di una particella in assenza di forze esterne che possono causare delle deviazioni dalla traiettoria. Nella teoria di Einstein lo spazio-tempo non è necessariamente piatto, può anche essere curvo. Dunque in quest'ultimo caso l'intervallo tra due eventi sarà definito dalla relazione:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.6)$$

dove gli indici μ e ν variano da 0 a 3¹. $x^0 = ct$ è la coordinata temporale, mentre x^1, x^2, x^3 sono le coordinate spaziali. $g_{\mu\nu}$ è il *tensore metrico* , simmetrico, che descrive la geometria dello spazio-tempo. Il cammino di una particella libera, che soddisfa la 1.5, è chiamato *geodetica* , ed è descritto dall'equazione delle geodetiche:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (1.7)$$

dove i $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ sono i *simboli di Christoffel* , definiti come:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left[\frac{\delta g_{\sigma\alpha}}{\delta x^\beta} + \frac{\delta g_{\sigma\beta}}{\delta x^\alpha} - \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x^\sigma} \right] \quad (1.8)$$

e la delta di Kronecker $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\alpha} = \delta_\alpha^\mu$ è uguale a uno quando $\mu = \alpha$ e zero altrimenti. Le particelle si muovono lungo delle geodetiche determinate dalla metrica $g_{\mu\nu}$. Queste geodetiche possono essere di tre tipi in base al segno che assume la 1.6. Se $ds^2 > 0$ allora ho delle geodetiche di tipo tempo, se al contrario $ds^2 < 0$ le geodetiche sono spazio, mentre se $ds^2 = 0$ ho geodetiche nulle. Quest'ultimo tipo di intervallo assume particolare importanza perché è il caso della luce.

In relatività generale, le equazioni sono tensoriali. Un tensore, per esempio $F_{\alpha,\beta}$ è una quantità che si trasforma, sotto un cambio di coordinate, come [56]:

$$F_{k',i'} = F_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{i'}} \quad (1.9)$$

¹Da qui in avanti sottintenderemo, come da convenzione, una sommatoria sugli indici ripetuti.

Un'altra cosa da sapere riguarda gli indici. Supponiamo di avere un tensore di ordine 1, cioè un vettore, e di fargli subire una trasformazione da un sistema di coordinate x^μ ad un altro sistema di coordinate $x^{\nu'}$. Se il vettore si trasforma come $\mathbf{A}' = (\partial x^{\nu'} / \partial x^\mu) \mathbf{A}$, allora il vettore \mathbf{A} si dice *controvariante* e si scrive $\mathbf{A} = A^\mu$. Se al contrario si trasforma come $\mathbf{A}' = (\partial x^\mu / \partial x^{\nu'}) \mathbf{A}$, allora si dice *covariante*, e si scrive $\mathbf{A} = A_\mu$.

Come nella fisica newtoniana, anche nella relatività generale, un ruolo importante è giocato dalle leggi di conservazione di massa, energia ed impulso. Data, dalla relatività speciale, l'equivalenza di massa ed energia ($E = mc^2$), queste leggi si riassumono nella forma: $\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$ ovvero $T_{\mu\nu,\mu}$. Dove $T_{\mu\nu}$ è la *tensore energia-impulso*, che descrive la distribuzione della materia-energia, e la virgola rappresenta la normale derivazione. Per un fluido perfetto, con pressione p e densità ρ , si può scrivere:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2) U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

Dove U_μ è la quadrivelocità del fluido. L'equazione di conservazione $T_{\mu\nu,\mu}$ non può essere valida in relatività generale, perché coinvolge termini che non sono tensori. È fuori dal nostro scopo spiegare il come e perché, ci basti sapere che l'equazione di conservazione, valida nella relatività generale, si scrive usando la derivata covariante (denotata dal ;) come:

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} \quad (1.11)$$

Il fine di Einstein era quello di legare il tensore energia-impulso con un altro ottenuto dal tensore metrico; così da descrivere insieme materia e metrica. Siccome, nel limite non relativistico, l'equazione 1.11 si deve ridurre all'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (1.12)$$

questo nuovo tensore doveva essere lineare nelle derivate seconde della metrica, e contenerne solo le derivate prime; inoltre Einstein voleva che avesse una derivata covariante nulla. Per costruire il nuovo tensore, Einstein usò il *tensore di Riemann* $R_{\nu\alpha\beta}^\mu$, che ci dice se uno spazio è piatto o curvo. Dal tensore di Riemann si ottiene il *tensore di Ricci* $R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^\sigma$, e, contraendo questo con la metrica, la *curvatura scalare* $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Finalmente unendo tutti questi ingredienti Einstein scrisse il nuovo tensore che cercava:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.13)$$

che prende il nome di *tensore di Einstein*. Dimostrato che $G_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$, Einstein scrisse la sua equazione fondamentale: l'*equazione di Einstein* della relatività

generale:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.14)$$

Dove il termine che moltiplica il tensore energia-impulso² assicura che, nel limite non relativistico, l'equazione di Poisson sia nella sua forma standard. Λ fu introdotta per rispettare il principio di Mach³. Einstein, infatti, era convinto che, una volta fissata la distribuzione di materia, questa avrebbe interamente descritto la struttura dello spazio-tempo. Le sue equazioni mostravano però che in presenza di materia distribuita omogeneamente, la geometria dello spazio-tempo non ammette soluzioni stazionarie. Da qui l'idea di introdurre il termine di costante cosmologica. La cosa aveva senso anche dal punto di vista osservativo, poiché all'epoca (1915/16), le poche misure di velocità di recessione (Lipsen) non mostravano alcuna espansione. Quindi l'equazione di Einstein 1.14 in presenza del termine di *costante cosmologica* si scrive:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

così da ottenere, come allora si pensava, un universo in equilibrio statico. Λ serve infatti a controbilanciare la forza di gravità che farebbe implodere l'universo, senza modificare nessun aspetto teorico degli altri campi della fisica; essa è infatti solo un termine geometrico. Ma esamineremo più avanti pregi e difetti di questo termine aggiuntivo.

1.4 La metrica

Cerchiamo ora di costruire dei modelli di universo in cui venga rispettato il principio cosmologico. Siccome la relatività generale è una teoria geometrica, andiamo ad esaminare le proprietà geometriche di uno spazio omogeneo ed isotropo.

Assegniamo ora ad ogni punto dello spazio le tre coordinate spaziali x^α , costanti nel tempo, con ($\alpha = 1, 2, 3$). ed una coordinata temporale: il *tempo proprio*, misurato da un orologio in moto col punto. Le coordinate x^α sono chiamate *coordinate comobili* o *comoventi*.

² G è la costante di gravitazione universale di Newton, ed ha un valore pari a $G \simeq 6.673 \times 10^{-11} \text{Nm}^2\text{Kg}^{-2}$

³Il principio recita: l'inerzia di ogni sistema è il risultato dell'interazione del sistema stesso con il resto dell'universo.

Se la distribuzione della materia è uniforme, allora lo spazio è omogeneo ed isotropo, ed il tempo proprio non è altro che il tempo misurato da un osservatore che vede l'universo espandersi uniformemente attorno a lui, tale che in ogni istante la metrica spaziale tridimensionale dl^2 tra i punti sia identica in tutti i luoghi ed in tutte le direzioni (per rispettare il principio cosmologico); dunque la forma della metrica, seguendo l'espressione della *gauge sincrona* sarà $ds^2 = (cdt)^2 - dl^2$. Con queste semplici considerazioni geometriche (per una completa derivazione si veda [12]), la metrica che meglio descrive, tra tutte quelle possibili, un universo dove sia valido il principio cosmologico ha la forma:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.16)$$

Questa è la metrica di *Friedmann-Robertson-Walker* (FRW)[32]. Dove (r, θ, ϕ) sono le coordinate polari nel sistema di riferimento comobile (se l'espansione dell'universo è perfettamente omogenea ed isotropa, allora le coordinate comobili di qualsiasi punto rimangono costanti nel tempo), t il tempo proprio, K è il *parametro di curvatura*, una costante che può assumere i valori 1, 0 o -1 a seconda che l'universo sia chiuso, piatto o aperto. Inoltre è da notare l'introduzione di una funzione $a(t)$, dipendente dal tempo, chiamata *fattore di scala*; ha le dimensioni di una lunghezza e serve a descrivere l'espansione o l'eventuale contrazione dell'universo, ed è normalizzata in modo che oggi sia $a(t_0) = 1$. Ciò vuol dire che una data galassia avrà, nel suo sistema di riferimento comobile, delle coordinate che non variano nel tempo, quella che varia nel tempo è proprio la metrica!

Possiamo riscrivere la 1.16 in maniera più compatta:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 [dr^2 + S_K(r)^2 d\Omega^2] \quad (1.17)$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ e con:

$$S_K(r) = \begin{cases} R \sin(r/R) & K = +1 \\ r & K = 0 \\ R \sinh(r/R) & K = -1 \end{cases} \quad (1.18)$$

che tiene conto delle tre possibili metriche per un spazio tridimensionale omogeneo ed isotropo. Nel primo caso ho un'ipersfera che rappresenta un universo con curvatura positiva (chiuso), ho poi uno universo piatto euclideo, quindi un iperboloide che rappresenta un universo a curvatura negativa (aperto). Invece R è il raggio di curvatura dello spazio.

1.5 Redshift e distanze

In un universo in espansione, la distanza tra due oggetti aumenta nel tempo. Quindi se vogliamo assegnare una distanza spaziale d tra due oggetti, dobbiamo specificare anche il tempo. Supponiamo di osservare una galassia, posta alle coordinate comobili (r, θ, ϕ) , stando nell'origine di un sistema di riferimento. La distanza tra noi e la galassia è uguale alla lunghezza della geodetica spaziale tra i due punti considerati, fissato il fattore di scala $a(t)$, ed un tempo $dt = 0$. Per ricavare questa distanza usiamo la metrica di FRW 1.17; lungo la geodetica l'angolo (θ, ϕ) è costante ($d\Omega = 0$), dunque:

$$ds = a(t)dr \quad (1.19)$$

Integrando sulla coordinata radiale comobile r otteniamo la *distanza propria*:

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r dr = a(t)r \quad (1.20)$$

Data questa forma per la distanza propria, possiamo vedere qual è il suo tasso di cambiamento tra noi e la galassia in esame. Ricordando che la distanza radiale comobile è indipendente dal tempo, e moltiplicando e dividendo per $a(t)$ si ha:

$$\dot{d}_p(t) = \dot{a}(t)r = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}d_p(t) \quad (1.21)$$

Assumendo che al tempo presente ($t = t_0$) le velocità peculiari delle galassie siano trascurabili, esiste una relazione lineare tra la distanza propria di una galassia e la sua velocità di recessione:

$$v_p(t_0) = \dot{d}_p(t_0) = H_0 d_p(t_0) \quad (1.22)$$

Con $H_0 = (\dot{a}/a)_{t=t_0}$. Ad un tempo qualsiasi si definisce il *parametro di Hubble*, una stima del tasso d'espansione dell'universo, che ci dice quanto il fattore di scala varia nel tempo:

$$H(t) = \frac{da/dt}{a(t)} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.23)$$

Di cui la costante di Hubble è solo un caso particolare: rappresenta il parametro di Hubble calcolato attualmente. Per cui la legge di Hubble può essere riscritta cosicché: $v = H(t)d$. Questo è l'unico campo di velocità compatibile con l'isotropia e l'omogeneità sancite nel principio cosmologico.

Nel paragrafo 1.2, avevamo affermato che Hubble diede una interpretazione

della regressione delle galassie come di una forma di effetto Doppler gravitazionale. Se questo fosse vero due punti qualsiasi separati da una distanza superiore alla distanza di Hubble d_H , che qui diviene una distanza critica, avranno una velocità maggiore di quella della luce ($v = \dot{d}_p > c$)! Bisogna però considerare che ci troviamo in un universo in espansione, in cui le lunghezze d'onda dei fotoni si allungano esattamente come le altre. Quindi più distante è una galassia, più è lungo il cammino che la luce deve percorrere ed il tempo impiegato nel farlo, maggiore è l'espansione dell'universo dal momento dell'emissione a quello della ricezione, e più la lunghezza d'onda viene allungata [6]. Quindi la regressione delle galassie non è una conseguenza di un effetto Doppler, ma dell'espansione dell'universo. Per esempio, se una sorgente a $z > 1$ mostra una $v > c$, vuol solo dire, in termini relativistici, che l'universo si è allargato più di due volte dall'emissione alla ricezione del fotone.

Quando osserviamo una galassia distante siamo in grado di conoscerne la posizione angolare, ma non la distanza. Possiamo però misurarne il redshift. Supponiamo che la luce venga emessa ad una lunghezza d'onda λ_e . La prima cresta sarà emessa ad un tempo t_e , e osservata a t_0 , la seconda cresta sarà emessa ad un tempo $t_e + \lambda_e/c$ ed osservata a $t_0 + \lambda_0/c$. Con in generale $\lambda_e \neq \lambda_0$. Lungo il suo viaggio percorre una geodetica nulla ($ds = 0$), che ha (θ, ϕ) costanti. Perciò $(cdt)^2 = a(t)^2 dr^2$. Da questa espressione si ricava con un semplice passaggio:

$$c \frac{dt}{a(t)} = dr \quad (1.24)$$

Per la prima cresta si ha:

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r \quad (1.25)$$

Per la seconda invece:

$$c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r \quad (1.26)$$

Eguagliando i termini delle due precedenti espressioni e sottraendovi quindi l'integrale $\int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$, troviamo la relazione:

$$\int_{t_e}^{t_e + \lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.27)$$

Se pensiamo al fatto che, nel tempo tra l'emissione e la ricezione delle due creste ($dt \simeq 10^{-32} H_0^{-1}$), l'universo non può essersi espanso più di tanto, allora

si può considerare costante il fattore di scala:

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} dt \quad (1.28)$$

o:

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)} \quad (1.29)$$

Se adesso utilizziamo la definizione di redshift 1.1 che abbiamo scritto nel paragrafo 1.2, vediamo che il redshift di un oggetto lontano è legato al fattore di scala calcolato al tempo dell'emissione della luce dall'oggetto stesso, come:

$$(1+z) = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)} \quad (1.30)$$

Dove si è fatto uso della normalizzazione del fattore di scala.

Tornando alla definizione della distanza propria $d_p(t_0)$, c'è da notare che, sfortunatamente, questa non è facilmente misurabile. Per valutare la distanza propria ad un tempo t_0 , il metro da usare dovrebbe espandersi con l'universo, dunque con una velocità data dalla legge di Hubble; oppure si potrebbe cercare di fermare l'espansione dell'universo. Si capisce facilmente che questi sono soluzioni impossibili da praticare. Proviamo allora a costruire delle distanze cosmologiche con l'ausilio delle proprietà degli oggetti osservati. Se conosciamo la luminosità L dell'oggetto che stiamo osservando (misurata a partire da un campione locale la cui distanza è nota), per esempio per mezzo di *candele standard*⁴, possiamo misurarne il flusso F utilizzandolo per definire la cosiddetta *distanza di luminosità*:

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2} \quad (1.31)$$

Che ha effettivamente le dimensioni di una distanza. L'universo però si espande, perciò il flusso della sorgente lontana sarà affievolito, sia perché l'espansione causa la diminuzione dell'energia dei fotoni, sia perché il tempo tra la rilevazione dei fotoni si allunga (entrambi diminuiscono di un fattore $a(t_0)/a(t_e) = (1+z)$). Così nel caso di un universo piatto in espansione avremo la relazione:

$$F = \frac{L}{4\pi d_p(t_0)^2 (1+z)^2} \quad (1.32)$$

⁴Una candela standard è un oggetto la cui luminosità, la stessa in ogni parte del cosmo, è nota. Delle ottime candele standard sono per esempio le supernove Ia [1][24], che si sviluppano in sistemi binari di stelle in cui una nana bianca, che riceve materia dalla stella compagna (gigante), esplose una volta passato il limite della massa di Chandrasekar di $1.4M_\odot$. Queste presentano una luminosità molto elevata: dell'ordine di 10^{51} erg [63]

dalla quale:

$$d_L = d_p(t_0)(1 + z) \quad (1.33)$$

Se invece della luminosità siamo a conoscenza della dimensione fisica dell'oggetto l , misurando l'angolo da esso sotteso $\delta\theta$, giungiamo a definire una *distanza di diametro angolare*:

$$d_A = \frac{l}{\delta\theta} \quad (1.34)$$

Questa nuova distanza è legata a quella propria dall'espressione seguente:

$$d_A = \frac{d_p(t_0)}{(1 + z)} \quad (1.35)$$

e a quella di luminosità attraverso la:

$$d_A = \frac{d_L}{(1 + z)^2} \quad (1.36)$$

1.6 Equazioni per l'universo

Come abbiamo visto, l'equazione di Einstein si esprime nella forma:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

Dove si è posto ($c=1$), ed in cui il lato sinistro dell'equazione descrive la geometria dello spazio-tempo, mentre il lato destro l'energia in esso contenuto; sta proprio qui il punto cardine delle equazioni di Einstein: legare la materia alla metrica che descrive lo spazio-tempo.

L'equazione di Friedmann

Notiamo che il tensore di Ricci può essere più convenientemente espresso in termini di simboli di Christoffel, dunque [22]:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} \quad (1.37)$$

Calcolando i simboli di Christoffel per un universo descritto dalla metrica FRW 1.16, si evince che le uniche componenti non nulle del tensore di Ricci sono quelle con $\mu = \nu = 0$ e $\mu = \nu = i$. Ricordando che $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} = \partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}/\partial x^{\alpha}$, per la componente 00 si ha:

$$R_{00} = \Gamma^{\alpha}_{00,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{0\alpha,0} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{00} - \Gamma^{\alpha}_{\beta 0}\Gamma^{\beta}_{0\alpha}$$

Ricordiamo che i simboli di Christoffel si annullano se i loro indici inferiori sono zero, dunque il primo e il terzo termine sulla destra si annullano. Similmente, gli indici α e β nel secondo e quarto termine saranno spaziali. Rimaniamo con:

$$R_{00} = -\Gamma^i{}_{0i,0} - \Gamma^i{}_{j0}\Gamma^j{}_{0i}$$

L'equazione $\Gamma^i{}_{0j} = \Gamma^i{}_{j0} = \delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a}$ ci conduce direttamente a:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\delta_{ij}\delta_{ij} \\ &= -3\left[\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right] - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \end{aligned} \tag{1.38}$$

Il fattore 3 viene dal fatto che δ_{ij} sottintende una somma sui tre indici spaziali. La componente spaziale è $R_{ij} = \delta_{ij}[2\dot{a}^2 + a\ddot{a}]$. Ora ricaviamo dopo pochi passaggi lo scalare di Ricci, anche detto *curvatura scalare*:

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] \tag{1.39}$$

Per considerare l'evoluzione del fattore di scala in un universo omogeneo, ci basta la componente temporale delle equazioni di Einstein:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi GT_{00}$$

Ma $T_{00} = \rho$, allora sostituendo le espressioni prima ricavate per R_{00} , R e con $g_{00} = -1$ otteniamo finalmente l'*equazione di Friedmann*:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \tag{1.40}$$

dove con ρ vengono considerate tutte le densità di energia di tutte le componenti dell'universo: *materia*, *radiazione* ed *energia oscura*, e dove K è il *parametro di curvatura*.

L'equazione dei fluidi

Da sola l'equazione di Friedmann non può specificare l'andamento del fattore di scala nel tempo, perché è pur sempre un'equazione in due incognite: $a(t)$ e

$\rho(t)$. Per uscire dall'impasse sfruttiamo la conservazione dell'energia: il tensore energia-impulso che compare sul lato destro dell'equazione di Einstein, considerando l'universo come un fluido perfetto ed isotropo si scrive:

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

dove P è la pressione del fluido, e ρ la densità. Densità e pressione evolvono col tempo secondo l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.42)$$

e l'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial P}{\partial x^i} = 0 \quad (1.43)$$

Col tensore energia impulso si passa ad una equazione di conservazione di 4 componenti: $\partial T^\mu_\nu / \partial x^\mu = 0$. In un universo in espansione tuttavia il criterio di conservazione viene modificato: $T^\mu_{\nu;\mu} = 0$. Dopo qualche passaggio si arriva all'equazione di conservazione in un universo in espansione:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \quad (1.44)$$

Questa è l'*equazione dei fluidi*, ed è la seconda equazione che descrive l'evoluzione dell'universo.

L'equazione di accelerazione

Combinando l'equazione di Friedmann con l'equazione su scritta, possiamo derivare una equazione di accelerazione che ci dica se l'espansione dell'universo stia accelerando o rallentando. Se moltiplichiamo l'equazione 1.40 per a^2 , la deriviamo, quindi la dividiamo per il termine $2\dot{a}a$, otteniamo l'equazione:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}(\dot{\rho}\frac{\dot{a}}{a} + 2\rho)$$

Usando l'equazione dei fluidi per fare la sostituzione $\dot{\rho}\frac{\dot{a}}{a} = -3(\rho + P)$, troviamo l'*equazione di accelerazione* che volevamo, detta anche *seconda equazione di Friedmann*:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (1.45)$$

Si nota che, se la densità di energia ρ è positiva, allora avremo un'accelerazione negativa (cioè una decelerazione) dell'universo.

L'equazione di stato

Ricapitolando, ora abbiamo tre equazioni a disposizione per tre incognite: $a(t)$, $\rho(t)$, $P(t)$. Tuttavia l'ultima equazione da noi ricavata non è indipendente dalle altre due, perciò torniamo ad avere due equazioni in tre incognite. Ci serve un'altra equazione: un'*equazione di stato* che leghi la pressione alla densità di energia del tipo $P = P(\rho)$. Per sostanze di interesse cosmologico, questa può essere scritta in una semplice forma:

$$P = w\rho \quad (1.46)$$

In cui w è una grandezza adimensionale. Ora il nostro set di equazioni è completo.

1.7 La costante cosmologica

Nelle equazioni di Einstein abbiamo visto comparire un termine che serviva a bilanciare la gravità ed ottenere così un universo statico, modello allora in auge. Questo termine, rappresentato dalla lettera greca Λ , è noto come *costante cosmologica* [13].

Einstein 1.15 che allora non era a conoscenza della radiazione di fondo cosmico (CMB), pensava che la maggior parte della radiazione fosse sottoforma di luce stellare e che la densità di energia provenisse dalla materia non relativistica, in modo da poter affermare che noi viviamo in un universo a pressione nulla. Era convinto che l'universo fosse statico con una densità d'energia positiva e pressione trascurabile. Però un universo che contiene solo materia, in generale non può essere statico ma deve o contrarsi o espandersi (in questa analisi l'unico universo statico possibile è un universo completamente vuoto), perciò Einstein introdusse nelle sue equazioni il termine di costante cosmologica. Così ottenne la convergenza tra le sue teorie e un universo pieno di materia.

Riderivando l'equazione di Friedmann con l'inserimento di Λ , si ha:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.47)$$

L'equazione dei fluidi non risente dell'effetto della costante cosmologica, mentre l'equazione di accelerazione diventa:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.48)$$

in pratica stiamo aggiungendo una nuova componente all'universo con una densità di energia $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$. E se Λ è costante, costante rimane anche ρ_Λ . E per far sì che questo accada, la costante cosmologica deve avere una pressione $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$.

Affinché l'universo sia statico bisogna che, sia \ddot{a} , che \dot{a} siano uguali a zero, così dall'equazione di accelerazione si deduce che $\Lambda = 4\pi G\rho$, mentre da quella di Friedmann si ottiene che l'universo di Einstein deve avere una curvatura positiva ($K = +1$) ed un raggio di curvatura $R_0 = 1/\Lambda^{1/2}$. Ma il modello ha un difetto pratico: è instabile: la forza repulsiva causata da Λ è maggiore dell'attrattiva di ρ ; se l'universo è in espansione, questa avviene con forte accelerazione, se è in contrazione va invece incontro ad un collasso. Fu Hubble che diede ad Einstein la scusa per abbandonare la costante cosmologica. Hubble però nelle sue prime analisi sottostimò la distanza delle galassie, e quindi sovrastimò la costante di Hubble. Il valore inizialmente attribuitole fu $H_0 = 500\text{km/s/Mpc}$, il che conduceva ad un'età dell'universo di $t_0 = H_0^{-1} \simeq 2\text{Gyr}$: meno della metà dell'età della Terra! Da questo dato alcuni cosmologi pensarono che per aumentare l'età dell'universo si dovesse reintrodurre un termine di costante cosmologica. In modo che \ddot{a} risultasse positivo, quindi \dot{a} fosse più piccolo nel passato che oggi, e conseguentemente che l'età dell'universo fosse più grande di 2Gyr. Dal 1917, la costante cosmologica, è andata più o meno di moda, particolarmente nei periodi in cui t_0 risultava minore delle età delle stelle più antiche a noi note.

Al giorno d'oggi, le osservazioni che indicano una espansione accelerata dell'universo causata da una forma di energia sconosciuta, perciò detta *energia oscura*[104]. Forma di energia di cui non sappiamo ancora dare una spiegazione fisica consistente. Una forma di energia oscura è rappresentata, per esempio, dalla costante cosmologica Λ .

Una possibilità è che si tratti di una forma di energia del vuoto. Dal punto di vista della fisica quantistica il vuoto possiede un'energia minima, infatti possono sempre formarsi e annichilirsi delle coppie particella-antiparticella. Il principio di indeterminazione di Heisenberg stabilisce che l'energia totale della coppia di particelle, che vengono dette virtuali, ΔE ed il suo tempo di vita Δt devono soddisfare la relazione $\Delta E\Delta t \leq \hbar$.⁵

⁵ \hbar è la costante di Planck ed ha un valore pari a $\hbar \simeq 6.626 \times 10^{-34}$ J s, mentre $\hbar = h/2\pi$

1.7.1 Problemi della costante cosmologica

Fondamentalmente ci sono due problemi principali [96] riguardanti l'introduzione della costante cosmologica: quello del *fine tuning* e quello cosiddetto del *why now?* Cercheremo ora con molta semplicità di spiegarli. Abbiamo visto come l'energia oscura possa essere trattata, dal punto di vista quantistico, come l'energia del vuoto.

Sappiamo che l'energia dello stato di zero di un oscillatore armonico [15] con potenziale $V(x) = \omega^2 x^2/2$ è $E_0 = \omega/2$, dove ω è la frequenza. Siccome ogni modo contribuisce all'energia del vuoto si deve eseguire un integrale su tutte le lunghezze d'onda. Questo integrale diverge all'infinito come ω^4 , a meno che non vengano tagliate le lunghezze d'onda più piccole della lunghezza di Planck ($L_P = (8\pi G)^{1/2} \simeq 10^{-32}\text{cm}$), ottenendo così per la densità di energia del vuoto attesa: $\rho_\Lambda^{asp} \simeq 10^{67}\text{GeV}^4$, mentre la densità di energia della costante cosmologica misurata è: $\rho_\Lambda^{mis} \simeq 10^{-47}\text{GeV}^4$. Che differiscono tra loro di ben 123 ordini di grandezza. Questa distanza tra valore atteso e misurato è il problema del fine tuning [14], che può essere migliorato attraverso la teoria supersimmetrica, secondo cui bosoni e fermioni contribuiscono in modo uguale, ma con segno opposto, alla densità di energia.

L'altro problema, quello del *why now?*, è rappresentato dalla coincidenza tra le attuali densità del vuoto e della materia, il cui rapporto però cambia velocemente con l'espansione dell'universo ($\Omega_\Lambda/\Omega_m \propto a^3$). In poche parole attualmente le due densità sono uguali, ma basta allontanarsi temporalmente anche di poco (per esempio a $z = 1$) perché il rapporto cambi sfavorendo la costante cosmologica. Perciò si può dedurre che per la quasi totalità della vita dell'universo materia e radiazione hanno sovrastato la costante cosmologica, mentre il sorpasso inverso è avvenuto da pochissimo tempo, ad un redshift tale che: $(1 + z_{eq})^{-3} = \Omega_m/\Omega_\Lambda$. Sostituendo nella quale i valori ormai consolidati di $\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$ si ottiene un redshift di $z_{m\Lambda} = 0.33$. È quindi da pochissimo che il sorpasso dell'energia oscura sulla materia è avvenuto.

1.8 Le componenti dell'universo

In questo paragrafo prendiamo in esame le tre principali componenti dell'universo: radiazione, materia ed energia oscura. L'equazione dei fluidi 1.44 vale solo separatamente per ogni singola componente. Dunque, alla luce del-

l'equazione di stato ($P = \sum_w P_w = \sum_w w\rho_w$), la componente con parametro w obbedisce all'equazione:

$$\dot{\rho}_w + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w)\rho_w = 0$$

che arrangiata da:

$$\rho_w(a) = \rho_{w,0}a^{-3(1+w)} \quad (1.49)$$

1.8.1 Parametri cosmologici

Per un universo piatto ($K=0$), dividendo entrambi i lati dell'equazione 1.40 per H_0^2 si ottiene una nuova formulazione della stessa:

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = -\frac{1}{\rho_{cr}} \sum_i \rho_i(a) \quad (1.50)$$

Dove compare a denominatore del termine a destra dell'uguale la *densità critica* ρ_{cr} , definita come:

$$\rho_{cr} = \frac{3}{8\pi G}H_0^2 \quad (1.51)$$

Se l'universo ha una densità maggiore di questo valore avrà una curvatura positiva ($K=+1$), altrimenti sarà curvato negativamente ($K=-1$). Attualmente la densità critica dell'universo ha un valore pari a $(9.2 \pm 1.8) \times 10^{-29} \text{g/cm}^3$ [62].

A questo punto è conveniente introdurre delle nuove variabili, molto usate in cosmologia. Definiamo dei parametri di densità adimensionali:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{cr}} \quad (1.52)$$

Questi parametri permettono di legare la densità di energia dell'universo con la sua metrica, infatti:

$$\Omega(t) = \begin{cases} > 1 & K = +1 & \text{universo chiuso} \\ = 1 & K = 0 & \text{universo piatto} \\ < 1 & K = -1 & \text{universo aperto} \end{cases} \quad (1.53)$$

In termini di parametri di densità l'equazione di Friedmann risulta:

$$1 - \Omega(t) = -\frac{K}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \quad (1.54)$$

La parte destra dell'equazione non può cambiare segno durante l'espansione dell'universo, dunque non può farlo nemmeno la parte sinistra. Così se $\Omega < 1$

ad un dato tempo, sarà così per sempre. Idem se $\Omega > 0 = 1$: un universo governato dalle equazioni di Friedmann non può cambiare il segno della sua curvatura.

Definendo ora il parametro di densità di curvatura:

$$\Omega_K = -\frac{K}{R_0^2 H_0^2 a^2} \quad (1.55)$$

si può ancora modificare la 1.54 ottenendo al tempo t_0 : $1 - \Omega_0 = \Omega_K$. In cui è palese la dipendenza della curvatura dell'universo dalla sua densità totale di energia. Da misure recenti e comprovate si vede che $\Omega_K = 0$, e che quindi ci troviamo in un universo piatto ed euclideo.

Un altro modo per scrivere l'equazione di Friedmann, facendo uso dell'equazione 1.49, è:

$$H(t)^2 = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \left[\Omega_{0w} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + (1 - \Omega_{0w}) \right] \quad (1.56)$$

Esplicitando tutti i contributi nell'equazione di Friedmann, e ricordando che, ad oggi $a(t_0) = a_0 = 1$, si ha:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda 0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2} \right) \quad (1.57)$$

Dove i vari parametri di densità sono rispettivamente quelli della materia, della radiazione, dell'energia oscura, e della curvatura. Considerando un universo piatto, dato ormai definitivamente assodato, ($K = 0$, $\Omega_K = 0$), otteniamo:

$$1 = \Omega_{0r} + \Omega_{0m} + \Omega_{0\Lambda} = \Omega_{0tot}$$

È dunque possibile ricavare l'evoluzione del fattore di scala dalla misura, al tempo presente, dei parametri cosmologici.

Da plurime e recenti (non riportiamo lo zero a pedice di ogni parametro) misure [33, 29, 44] abbiamo per i diversi parametri cosmologici questi valori:

- $\Omega_r = \Omega_\gamma (1 + 0.2271 N_{ef})$
 - $N_{ef} \approx 3.04$
 - $\Omega_\gamma \approx 4.76 \times 10^{-5}$
- $\Omega_m \approx 0.258 \pm 0.030$
 - $\Omega_b h^2 \approx 0.02273 \pm 0.00062$

$$- \Omega_c h^2 \approx 0.1099 \pm 0.0062$$

- $\Omega_\Lambda \approx 0.742 \pm 0.030$
- $\Omega_K = 0$

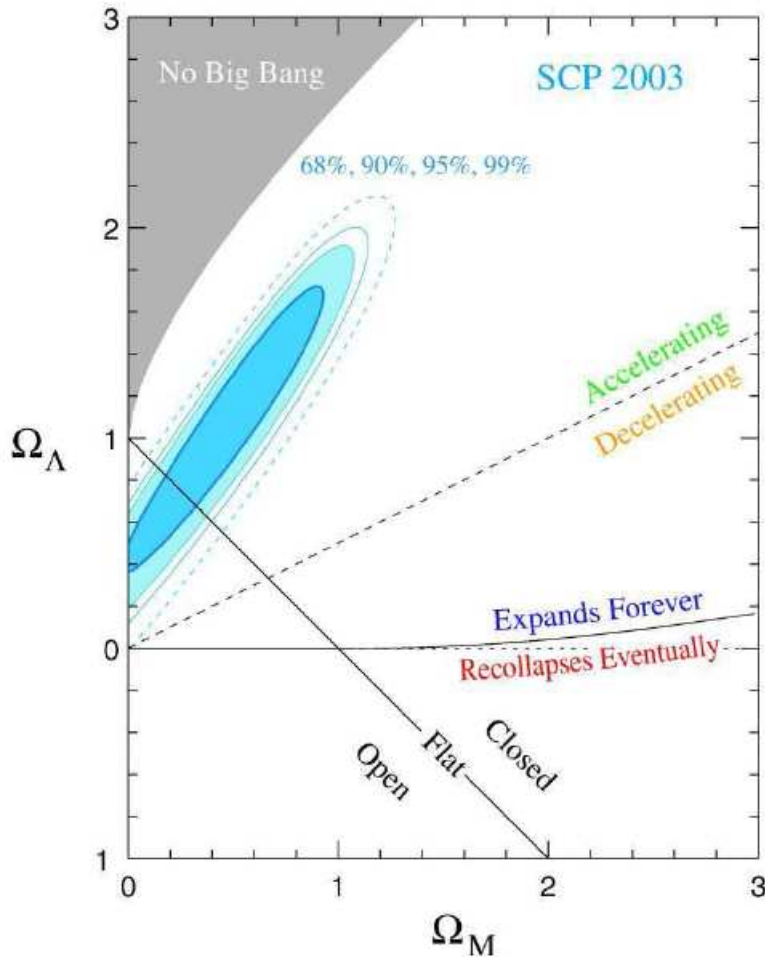


Figura 1.1: Contorni di probabilità per Ω_Λ, Ω_m , in azzurro. Sono illustrate regioni rappresentanti specifici scenari cosmologici: modelli di universo piatto, aperto e chiuso, nonché le possibili future evoluzioni dell'universo. Dati del Supernova Cosmology Project. La regione di massima probabilità è consistente con un universo contenente energia oscura e in accelerazione [24].

1.8.2 Le densità

Vediamo ora, facendo uso dell'equazione 1.49, come evolvono le densità delle varie componenti dell'universo in funzione del fattore di scala e del redshift.

Radiazione

Un fluido di particelle relativistiche, non degeneri, in equilibrio termico, ha un $w = 1/3$ che compare nell'equazione di stato, dunque:

$$P_r = \frac{1}{3}\rho c^2 \quad (1.58)$$

è questo il caso di un gas di fotoni. Sostituendo il valore del parametro nell'equazione che regola l'evoluzione della densità di energia, troviamo:

$$\dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0$$

che risolta da:

$$\rho_r = \rho_{r,0}a^{-4} = \rho_{r,0}(1+z)^4 \quad (1.59)$$

avendo richiamato la relazione che lega il redshift al fattore di scala.

Materia

per la materia $w = 0$, che è il caso della polvere, cioè di materia non soggetta ad alcuna pressione. Questa è anche una buona approssimazione del comportamento di qualsivoglia fluido o gas non relativistici. Un gas di particelle ad una certa temperatura T esercita una pressione, ma la tipica energia termica di una particella è $k_B T$ ⁶, mentre la sua massa a riposo è $m_p c^2$, solitamente molto più grande. Per cui l'effetto della pressione è trascurabile. In dettaglio: se si considera un gas ideale di particelle non relativistiche di massa m_p , temperatura T , densità ρ_m si avrà:

$$P_m = nk_B T = \frac{k_B T}{m_p c^2} \rho_m c^2 = w(T)\rho c^2 \quad (1.60)$$

dove, in questo caso, ρc^2 è la densità di energia. un gas non relativistico ha un $w(T) \ll 1$, e può quindi essere approssimato da un fluido di polvere. Possiamo quindi affermare che $P_m = 0$.

Nell'equazione di evoluzione della densità d'energia si ha:

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = 0$$

che risolta conduce alla relazione:

$$\rho_m = \rho_{m,0}a^{-3} = \rho_{m,0}(1+z)^3 \quad (1.61)$$

⁶ k_B è la costante di Boltzmann che ha un valore pari a $k_B \simeq 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$

Le differenze tra l'equazione 1.61 e la 1.59, possono essere comprese se si considera, ad esempio, una scatola in espansione contenente particelle. Le particelle non verranno né create né distrutte. Nel caso di materia la densità semplicemente decresce come il cubo del fattore di scala, cioè proporzionalmente al volume che si espande. Se invece le particelle sono relativistiche, non solo la loro densità è diminuita di un fattore a^3 , ma anche la loro energia diminuisce, per tramite della lunghezza d'onda di ogni particella, che è incrementata di un fattore a . Perciò la densità di radiazione decresce più rapidamente di quella della materia.

Energia oscura

Tutte le componenti che presentano un $w < -\frac{1}{3\Omega_w}$ sono classificate come energia oscura. Per esempio la costante cosmologica ha $w = -1$. Abbiamo così per la pressione:

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda \quad (1.62)$$

e per l'evoluzione della densità d'energia:

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0$$

Cioè:

$$\rho_\Lambda = \text{cost} \quad (1.63)$$

In questo modo la pressione, negativa, si oppone al collasso gravitazionale.

1.8.3 L'evoluzione del fattore di scala

Come abbiamo visto vi sono tre andamenti differenti delle densità per le tre componenti più importanti dell'universo. L'universo ha in effetti sperimentato tre differenti regimi, in ognuno dei quali dominava una sola componente su tutte le altre. Dalla dipendenza di ρ_i in funzione del fattore di scala, si evince che, per prima, si è avuta la fase dominata dalla radiazione, quindi quella della materia, e da relativamente poco tempo, siamo entrati nella fase dominata dall'energia oscura.

Nell'epoca dominata dalla radiazione ($w = 1/3$), dall'equazione di Friedmann ricaviamo l'andamento del fattore di scala in funzione del tempo proprio:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \quad (1.64)$$

ed il parametro di Hubble è:

$$H(t) = \frac{1}{2t} \quad (1.65)$$

Come visto prima, la densità di energia della radiazione decresce più velocemente di quella della materia, per cui ad un certo tempo la materia incomincerà a dominare sulla radiazione. L'epoca di passaggio è detta *equivalenza radiazione-materia*, e si deduce eguagliando le rispettive densità:

$$\frac{\Omega_{r0}}{a_{rm}^4} = \frac{\rho_r(a_{rm})}{\rho_{cr}(a_{rm})} = \frac{\rho_m(a_{rm})}{\rho_{cr}(a_{rm})} = \frac{\Omega_{m0}}{a_{rm}^3}$$

Perciò per il fattore di scala si ha:

$$a_{rm} = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}} \simeq 2.8 \times 10^{-4} \quad (1.66)$$

che corrisponde ad un redshift $z \propto a_{rm}^{-1} \simeq 3600$, che è il redshift dell'equivalenza tra materia e radiazione.

Durante la fase dominata dalla materia, invece, l'andamento del fattore di scala è:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (1.67)$$

con un parametro di Hubble pari a:

$$H(t) = \frac{2}{3t} \quad (1.68)$$

Esiste però anche un secondo momento di equivalenza, in cui materia e costante cosmologica si equivalgono, prima che l'energia oscura diventi la componente dominante. Durante quest'ultima equivalenza, ricordando che la densità d'energia della costante cosmologica è costante, si ha:

$$\frac{\Omega_{m0}}{a_{m\Lambda}^3} = \frac{\rho_m(a_{m\Lambda})}{\rho_{cr}} = \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_{cr}} = \Omega_{\Lambda}$$

Che porta ad avere un fattore di scala con valore:

$$a_{m\Lambda} = \sqrt[3]{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda}}} \simeq 0.75 \quad (1.69)$$

che corrisponde ad un redshift di 0.33, cioè estremamente vicino, su scale cosmologiche, ad oggi. Durante l'era dominata dall'energia oscura, in un universo completamente dominato dalla costante cosmologica, l'andamento del fattore di scala nel tempo è:

$$a(t) = \exp[H_0(t - t_0)] \quad (1.70)$$

Da cui risulta, in maniera lapalissiana, come l'espansione dell'universo proceda accelerando esponenzialmente.

1.8.4 Parametro di decelerazione

Determinare esattamente la forma del fattore di scala $a(t)$ non è semplice; conviene perciò espanderlo in serie di Taylor intorno al valore assunto oggi $a(t_0)$:

$$a(t) = a(t_0) + \frac{da}{dt}\Big|_{t=t_0}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dt^2}\Big|_{t=t_0}(t - t_0)^2 + \dots \quad (1.71)$$

Ci fermiamo al secondo ordine che già può dare un'ottima approssimazione nelle vicinanze di $a(t_0)$. Dividendo tutti i termini per $a(t_0)$ e ricordandone la normalizzazione, otteniamo:

$$a(t) \simeq 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 \quad (1.72)$$

Dove compaiono la costante di Hubble, ed un nuovo parametro adimensionale q_0 , chiamato *parametro di decelerazione*⁷, definito come:

$$q_0 = - \left(\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} \right)_{t=t_0} \quad (1.73)$$

Un valore positivo di q_0 corrisponde ad $\ddot{a} < 0$ una accelerazione negativa, viceversa un valore negativo del parametro avrà come risultato una accelerazione dell'espansione dell'universo ($\ddot{a} > 0$). Siccome il parametro di decelerazione è stato ricavato senza ricorrere alle equazioni che descrivono l'evoluzione dell'universo, possiamo ora usare l'equazione di Friedmann per stabilire la forma di q_0 per diversi modelli cosmologici. Dopo qualche semplice passaggio si ha:

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_w \Omega_{w0}(1 + 3w) \quad (1.74)$$

Da cui si evince che una fase accelerata è possibile se e solo se l'universo è dominato da una componente con parametro $w_{de} < -1/(3\Omega_{de})$. La 1.74 porta, per un universo contenente materia, radiazione ed energia oscura, alla relazione:

$$q_0 = \Omega_{r0} + \frac{1}{2}\Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda 0} \quad (1.75)$$

Dove se $\Omega_{\Lambda 0} > \Omega_{r0} + \Omega_{m0}/2$, cioè se domina l'energia oscura, l'universo sta accelerando. Ed in effetti così è, visto che il valore che attualmente si misura è $q_0 = -0.55$: prova ulteriore dell'espansione accelerata che il nostro universo subisce.

⁷È così chiamato perché verso la metà del XX secolo si pensava, in base ai pochi dati osservativi disponibili, che l'universo stesse decelerando

1.9 Termodinamica dell'universo in espansione

Il modello cosmologico standard è sovente indicato col nome di *hot big bang model* [32]. Come abbiamo visto, questo modello consiste in un universo omogeneo ed isotropo, la cui evoluzione è governata dalle equazioni di Friedmann ottenute dalla relatività generale (con o senza costante cosmologica), e le cui componenti principali possono essere descritti da fluidi di materia e radiazione. E le cui proprietà cinematiche danno una buona descrizione di quello che accade nell'universo reale. Si assume inoltre che la componente radiativa dell'universo sia di origine cosmologica (da qui il termine *hot* nel nome del modello). Per *big bang* si intende l'esplosione iniziale che dovrebbe aver dato origine all'universo. Dal quel momento l'universo ha cominciato un'espansione che è tuttora in corso [22].

All'inizio temperatura, densità e pressione erano così alte che la materia, come noi la conosciamo oggi non poteva esistere, ai nostri occhi si sarebbe presentato un plasma fatto di particelle relativistiche e radiazione. Per gran parte della vita primordiale dell'universo, le reazioni tra questi elementi procedono con una rapidità così grande da far sì che le particelle siano in equilibrio; e che specie differenti condividano la medesima temperatura. Assistiamo quindi, in assenza di scambi energetici con l'esterno, ad una espansione adiabatica.

È conveniente introdurre ora le *funzioni di distribuzione*, anche dette *numero di occupazione*, per le diverse specie. Queste funzioni contano il numero di particelle in una data regione dello spazio delle fasi intorno alla posizione \mathbf{x} e all'impulso \mathbf{p} .

Per un sistema all'equilibrio con temperatura T , la funzione di distribuzione assume la forma:

$$f = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} \pm 1} \quad (1.76)$$

dove μ è il *potenziale chimico*, k_B è la costante di Boltzmann, E l'energia dello stato, e il segno più si ha nel caso di fermioni (*distribuzione di Fermi-Dirac*), mentre il meno nel caso di bosoni (*distribuzione di Bose-Einstein*).

Da questa espressione si possono ricavare la densità numerica degli stati, la densità d'energia e la pressione:

$$n = \int \frac{g}{(2\pi)^3} f d^3 p \quad (1.77)$$

$$\rho = \int \frac{g}{(2\pi)^3} f E d^3 p \quad (1.78)$$

$$P = \int \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{f}{3E} d^3 p \quad (1.79)$$

dove g rappresenta il *fattore di degenerazione*, ossia il numero di gradi di libertà (o stati di spin, che dir si voglia) della specie considerata, e p è il modulo dell'impulso. In generale, il potenziale chimico è assai minore della temperatura, dunque, con buona approssimazione, la funzione di distribuzione dipende solamente dal rapporto E/T . In tal caso, la pressione soddisfa la relazione:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\rho + P}{T} \quad (1.80)$$

Questa formula ci può essere utile per definire l'andamento della densità di entropia dell'universo in funzione del fattore di scala. Se arrangiamo la 1.44 in modo che:

$$a^{-3} \frac{\partial[(\rho + P)a^3]}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (1.81)$$

e riscriviamo la derivata della pressione come $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dT}{dt} \frac{\partial P}{\partial T}$, si ha:

$$a^{-3} \frac{\partial[(\rho + P)a^3]}{\partial t} - \frac{dT}{dt} \frac{(\rho + P)}{T} = a^{-3} T \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\rho + P)a^3}{T} \right] = 0 \quad (1.82)$$

Così la densità d'entropia scala come:

$$s = \frac{\rho + P}{T} \propto a^{-3} \quad (1.83)$$

Questo risultato vale per l'entropia totale includendo tutte le specie in equilibrio.

1.9.1 I fotoni

La temperatura dei fotoni della radiazione di fondo cosmico (di cui ci occuperemo nel prossimo capitolo) è stata accuratamente misurata dall'esperimento COBE-FIRAS, essa è: $T_\gamma = 2.725 \pm 0.02\text{K}$. Considerando che i fotoni sono bosoni di spin 1, e che quindi si applica la distribuzione di Bose-Einstein, possiamo ricavare che la densità di energia associata a questa radiazione è data dalla relazione:

$$\rho_\gamma = 2 \int \frac{p}{e^{pT} - 1} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (1.84)$$

Il fattore 2 davanti l'integrale viene dal fatto che esistono due stati di spin per il fotone ($g = 2$). Bisogna far notare, inoltre, che il fotone non avendo massa possiede un'energia che è semplicemente uguale al suo impulso p ⁸.

⁸Dalla relatività speciale: $E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$

Nell'universo primordiale, il potenziale chimico è assunto uguale a zero. Non essendoci dipendenza dagli angoli, possiamo risolvere l'integrale sulla parte angolare che da un fattore 4π , così da rimanere con un integrale monodimensionale. Con un cambio di variabile ($x = P/T$), si ottiene per la densità:

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4 \quad (1.85)$$

Sapendo dalla 1.59 che la densità di energia della radiazione ρ_r è proporzionale a a^{-4} , allora la temperatura dei fotoni scalerà come:

$$T(a) = \frac{1}{a} \quad (1.86)$$

dalla quale si deduce che l'universo si raffredda, a causa dell'espansione, come l'inverso del fattore di scala. Il parametro di densità dei fotoni, inoltre, sarà $\Omega_\gamma = \frac{2.47 \times 10^{-5}}{h^2 a^4}$, che, attraverso il fattore di scala, dipende esclusivamente dal tempo.

Come abbiamo visto, sulle grandi scale, l'universo si assume essere omogeneo e isotropo. Se devia da questa assunzione, la deviazione è comunque piccola, e si può trattare il problema in termini perturbativi, cioè espandendo in serie in cui, per ordini superiori al primo, le perturbazioni assumono anche una dipendenza spaziale. Da queste si svilupperanno direttamente le anisotropie della radiazione di fondo cosmico che esamineremo nel capitolo 2.

1.9.2 Fondo cosmico di neutrini

I neutrini del fondo cosmico non sono mai stati osservati direttamente, la loro esistenza è però strettamente legata alla validità del Modello Standard delle interazioni fondamentali, che descrive lo stato della materia nell'universo primordiale. Dunque ci basiamo solo su delle teorie [102]. In particolare ci interessa conoscere il contributo che essi danno alla densità di energia dell'universo. I neutrini, che sono fermioni (hanno spin $1/2$) con distribuzione di Fermi-Dirac, hanno potenziale chimico nullo, $f_{FD} = 1/(e^{(E-\mu)/T} + 1) \rightarrow f_{FD}^\nu = 1/(e^{E/T} + 1)$. Essendo le loro interazioni deboli, si distaccano dall'equilibrio, pur continuando ad avere una distribuzione Fermi-Dirac, con una temperatura che decresce come a^{-1} .

Interessante è legare la temperatura dei neutrini a quella dei fotoni. Facendo ciò, la parte con più difficoltà risiede nella descrizione dell'annichilazione di elettroni e positroni, quando la temperatura del plasma primordiale raggiunge i $511\text{Kev} \simeq 1m_e$. Per fortuna i neutrini perdono contatto prima di questa annichilazione cosicché non ne portano traccia nella loro energia. Al contrario i fotoni, che la subiscono, risultano più caldi dei neutrini.

Il calcolo della temperatura dei neutrini

Per tener conto dell'annichilazione consideriamo la densità di entropia totale s , definita dall'espressione 1.83:

$$s = \frac{p + \rho}{T} \propto a^{-3}$$

che vale per tutte le specie all'equilibrio, pur se con temperature diverse. Vediamo la situazione prima e dopo l'annichilazione.

Sia a^* il valore del fattore di scala all'epoca dell'annichilazione.

Tenendo conto che il contributo alla densità di energia delle particelle relativistiche è dato dalla [22]:

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} T^4 \left[\sum_{i=bosoni} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i=fermioni} g_i \right] \quad (1.87)$$

- per $a_1 < a^*$ si ha:

$$s(a_1) = \frac{2\pi^2}{45} T_1^3 g_{tot} = \frac{2\pi^2}{45} T_1^3 \left[2 + \frac{7}{8}(2 + 2 + 3 + 3) \right] = \frac{43\pi^2}{90} T_1^3 ,$$

dove nelle parentesi quadre il fattore 2 rappresenta il contributo dei fotoni, mentre i fermioni senza massa contribuiscono per 7/8 (2 per gli elettroni, 2 per i positroni, 3 per i neutrini e 3 per gli antineutrini) all'entropia totale. Le particelle massive non contribuiscono.

- per $a_2 > a^*$ invece:

$$s(a_2) = \frac{2\pi^2}{45} T_2^3 g_{tot} = \frac{2\pi^2}{45} \left[2T_\gamma^3 + \frac{7}{8}6T_\nu^3 \right]$$

in quanto dopo l'annichilazione non ci sono più elettroni e positroni, e la temperatura dei fotoni sarà diversa da quella dei neutrini.

Sapendo che la temperatura dei neutrini decresce come a^{-1} dunque $a_1 T_1 = a_2 T_\nu(a_2)$, e valendo l'uguaglianza $s(a_1) a_1^3 = s(a_2) a_2^3$ si arriva all'espressione del rapporto tra le temperature di neutrini e fotoni che stavamo cercando:

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} \quad (1.88)$$

La densità dei neutrini

Prima di valutare la densità di energia dei neutrini nell'universo, ricapitoliamo le nostre conoscenze sui neutrini

1. hanno un grado di libertà per lo spin
2. hanno antiparticelle
3. esistono tre famiglie di neutrini
4. sono fermioni
5. esiste una relazione che lega le temperature di fotoni e neutrini

Le prime tre affermazioni implicano che il fattore di degenerazione dei neutrini è uguale a sei. Se poi la densità di energia di una particella senza massa scala come T^4 , l'ultima enunciazione fa sì che la densità di energia dei neutrini sia più piccola di quella dei fotoni di un fattore $(4/11)^{4/3}$. Tutto ciò porta a scrivere:

$$\rho_\nu = 3 \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \rho_\gamma \quad (1.89)$$

Pertanto, se i neutrini delle tre specie hanno tutti massa nulla, allora il loro contributo alla densità di energia oggi è:

$$\Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_{cr}} \Big|_{oggi} = \frac{1.68 \times 10^{-5}}{h^2} \text{ con } m_\nu = 0 \quad (1.90)$$

In realtà i neutrini sembrano avere una massa, questo risulta da varie misure di oscillazioni di neutrini. In tal caso, la densità di energia di neutrini massivi è data da:

$$\rho_\nu = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{p^2 + m_\nu^2}}{e^{p/T_\nu} + 1} \quad (1.91)$$

che si riduce a quella per neutrini a massa nulla ad alte temperature, mentre la su scritta è usata quando ci si avvicina all'equivalenza. La densità dei neutrini massivi è $m_\nu n_\nu$ con una densità numerica $n_\nu = \frac{3}{11} n_\gamma$. Quindi se $n_\gamma \simeq 411 \gamma/\text{cm}^{-3}$ allora $n_\nu \simeq 112 \nu/\text{cm}^{-3}$. La transizione ha luogo quando $T_\nu \sim m_\nu$, dunque:

$$\Omega_\nu = \frac{\sum_\nu m_\nu}{94 h^2 \text{eV}} \text{ con } m_\nu \neq 0 \quad (1.92)$$

La semplice osservazione che la densità totale non è molto più grande della densità critica conduce a dei limiti sulla massa dei neutrini più significativi perfino di quelli ottenuti nei laboratori di fisica delle particelle.

Oscillazioni dei neutrini

Diversi esperimenti, quali SuperKamiokande (misura di neutrini atmosferici), SNO (misura neutrini solari) ed altri, hanno dato conferma che i neutrini debbano avere una, seppur piccola, massa. Tutto parte dalla considerazione che gli autostati di massa dei neutrini non corrispondano agli stati di puro numero leptonico. Dal punto di vista della teoria [58] quello che accade è un mescolamento dei diversi stati di neutrino, simile alla teoria di mescolamento dei quark di Cabibbo. Consideriamo, per semplicità, solo due sapori di neutrino, quello elettronico (ν_e) e quello muonico (ν_μ). Possiamo immaginare che esistano combinazioni degli autostati di massa ν_1 e ν_2 , di modo che:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

dove θ è l'angolo di mescolamento. Facendo uso del linguaggio della meccanica quantistica, ciò significa che uno stato di neutrino elettronico può essere scritto come sovrapposizione dei due autostati di massa:

$$|\nu_e\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle \quad (1.94)$$

Se chiamiamo E_1 ed E_2 gli autovalori dei due autostati dell'energia, allora lo stato evolverà come:

$$|\nu_e(t)\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin \theta |\nu_2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar} \quad (1.95)$$

Segue quindi che la probabilità di trovare uno stato di puro neutrino elettronico dopo un dato tempo t sarà:

$$P(t) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \left[\frac{(E_1 - E_2)t}{2\hbar} \right] \quad (1.96)$$

Dalla quale si capisce il perché vengono chiamate oscillazioni di neutrino, il neutrino precede tra lo stato elettronico ed il muonico. Se entrambi gli stati hanno lo stesso impulso, allora la loro differenza di energia sarà:

$$E_2 - E_1 = \frac{(m_2^2 - m_1^2)c^4}{2E} = \frac{\Delta m^2 c^4}{2E} \quad (1.97)$$

dove $E = (E_1 + E_2)/2$. A questo punto possiamo riscrivere la 1.96 come:

$$P(t) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(\frac{\pi R}{L} \right) \quad (1.98)$$

per un fascio di neutrini elettronici che viaggiano per una distanza R . Qui compare anche la lunghezza d'oscillazione:

$$L = \frac{4\pi E\hbar}{\Delta m^2 c^3} \quad (1.99)$$

che da la scala tipica delle oscillazioni. Da notare il fatto che l'oscillazione non avviene se i due neutrini hanno la stessa massa. Tipicamente L è molto grande, per questo si concentrano gli esperimenti sui neutrini atmosferici (prodotti dai raggi cosmici) e su quelli solari (prodotti dalle reazioni nel nucleo del Sole).

Ricapitolando, i neutrini hanno una distribuzione di Fermi-Dirac con potenziale chimico nullo. La nostra ignoranza riguardo la loro massa, ricade direttamente sulla conoscenza della loro densità d'energia, sulla quale c'è ambiguità, che scompare se le temperature sono maggiori delle masse ed i neutrini si comportano in maniera relativistica. Quindi l'incertezza sulla massa dei neutrini [75, 72] non interessa la nucleosintesi (che avviene a temperature dell'ordine di 1 MeV) e nemmeno l'equivalenza radiazione-materia (a temperature di circa 1 eV).

1.9.3 Nucleosintesi primordiale degli elementi leggeri

Quando l'universo era molto più caldo e denso e la temperatura era dell'ordine del MeV/k_B , non c'erano atomi neutri o nuclei legati. Il dominio della radiazione in un ambiente così caldo assicura che ogni atomo o nucleo prodotto sia immediatamente distrutto da un fotone di alta energia. Quando il raffreddamento dell'universo giunge al punto in cui la temperatura è più bassa di quella di legame dei nuclei, cominciano a formarsi gli *elementi leggeri* [64].

Quando la temperatura dell'universo si abbassa fino ad 1 MeV, il plasma cosmico primordiale consiste di [22]:

- **particelle relativistiche in equilibrio: elettroni e positroni.** Queste sono fortemente accoppiate le une alle altre dalle interazioni elettromagnetiche come lo *scattering Compton* $e^+e^- \leftrightarrow \gamma\gamma$. A parte una piccola differenza, dovuta alla statistica di bosoni e fermioni, hanno tutte la stessa abbondanza
- **particelle relativistiche disaccoppiate: neutrini.** A temperature poco sopra 1 MeV, il tasso per processi come $\nu e \leftrightarrow \nu e$ che accoppiano i neutrini al resto del plasma cade sotto il tasso di espansione. Quindi i neutrini condividono la stessa temperatura delle altre particelle relativistiche. Pur abbondanti non si accoppiano più con esse.

- **particelle non relativistiche: barioni.** Se, nell'iniziale processo di bariogenesi, non c'è stata asimmetria nel numero di barioni e antibarioni, allora entrambi saranno completamente assenti ad 1 MeV. Tuttavia, un'asimmetria di questo genere esiste: inizialmente $(n_b - n_{\bar{b}})/s \sim 10^{-10}$ ⁹. e questo rapporto rimane costante durante tutta l'espansione. Col tempo la temperatura arriva al di sotto di 1 MeV, tutti gli antibarioni sono stati annichiliti, così

$$\eta_b = \frac{n_b}{n_\gamma} = 5.5 \times 10^{-10} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.020} \right) \quad (1.100)$$

Le previsioni teoriche dipendono dalla densità dei protoni e dei neutroni al tempo della nucleosintesi. La densità combinata di neutroni e protoni è detta densità di *barioni* (entrambe le specie hanno numero barionico uno, e sono le uniche presenti a quel tempo). In pratica, sapendo come scalano queste densità con l'evolversi dell'universo, la nucleosintesi primordiale fornisce una misura della densità dei barioni nell'universo partendo dalle abbondanze degli elementi leggeri.

Cenni di fisica nucleare e cosmologia

Con l'espandersi ed il raffreddarsi dell'universo, l'energia media per fotone passa da $E_{mean}(t_P) \sim E_P \sim 10^{28} \text{eV}$ al tempo di Planck ad $E_{mean}(t_0) \approx 6 \times 10^{-4} \text{eV}$ oggi. Dunque, studiando l'universo, esploriamo lo stato della materia visibile e non, su 31 ordini di grandezza dell'energia delle particelle [93]. La scala di maggior interesse è quella di ionizzazione di un atomo. L'energia di ionizzazione dell'idrogeno è $Q = 13.6 \text{eV}$. L'energia di ionizzazione degli altri elementi (cioè l'energia necessaria per rimuovere il più lontano elettrone legato dell'atomo neutro) è dello stesso ordine di grandezza. I fisici nucleari si concentrano specialmente sui processi, ad alta energia, di fusione e fissione dei nuclei atomici. Un nucleo atomico contiene Z protoni e N neutroni con $Z \geq 1$ e $N \geq 0$, collettivamente chiamati nucleoni. La somma di Z ed N è detto *numero di massa*: A . Per esempio il nucleo di idrogeno ha $Z = 1$ e l'elio $Z = 2$; differenti isotopi di uno stesso elemento hanno lo stesso Z ma possono avere diversi numeri di neutroni. Un nucleo standard di idrogeno, simboleggiato da 1H è costituito essenzialmente da un protone. L'idrogeno pesante o deuterio D ha un protone ed un neutrone, l'elio ha 2 neutroni e 2 protoni ed è simboleggiato da 4He . L'*energia di legame* B di un nucleo è l'energia richiesta per separare protoni e neutroni, o equivalentemente è l'energia rilasciata dalla fusione di protoni e neutroni in un nucleo.

⁹s è la densità di entropia che scala come a^{-3}

I nuclei più fortemente legati sono quelli di ${}^{56}\text{Fe}$ e di ${}^{62}\text{Ni}$ ($B/A \approx 8.8$ MeV). Nuclei più massicci di ferro e nichel possono rilasciare energia dalla fissione in nuclei più leggeri. Nuclei più leggeri di ferro e nichel possono rilasciare energia dalla fusione in nuclei più pesanti. La tipica energia di legame per nucleone è ≈ 8 MeV. Come elettroni e protoni si combinano a formare atomi di idrogeno neutro quando la temperatura scende sufficientemente al di sotto dell'energia di ionizzazione dell'idrogeno, così protoni e neutroni si dovranno fondere in deuterio per temperature sufficientemente più basse dell'energia di legame $B_D = 2,22$ MeV. L'epoca della ricombinazione dell'idrogeno dev'essere preceduta da un'epoca di fusione nucleare comunemente chiamata nucleosintesi primordiale (*BBN, Big Bang Nucleosynthesis*).

Neutroni e protoni

Per cominciare a descrivere la nucleosintesi partiamo dai neutroni e dai protoni. L'energia a riposo di un neutrone è maggiore di quella di un protone di un fattore:

$$Q_n = m_n c^2 - m_p c^2 = 1.29 \text{ MeV}$$

Un neutrone libero è instabile e decade (in $\tau_n = 890$ s) attraverso la reazione $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Prendiamo in considerazione lo stato dell'universo quando aveva l'età di $t = 0.1$ s. A quel tempo la temperatura era dell'ordine dei 3000 K, ed i fotoni possedevano un'energia media pari a circa 10 MeV. Le reazioni che avevano luogo erano:



Queste interazioni permettevano il perdurare di un equilibrio termico tra le specie. In queste condizioni è lecito applicare le *equazioni di Maxwell-Boltzmann* per la densità d'energia:

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_i c^2}{k_B T}} \quad (1.102)$$

Dove $i=n,p$. Se $g_n = g_p = 2$ e $(m_n/m_p)^{3/2} \simeq 1$ allora il rapporto neutroni protoni è:

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(-\frac{Q_n}{k_B T}\right) \quad (1.103)$$

A temperature $k_B T \gg Q_n = 1.29 \text{ MeV}$, corrispondenti a $T \gg 1.5 \times 10^{10} \text{ K}$ e a $t \ll 1 \text{ s}$, il numero di neutroni è pressoché uguale a quello dei protoni.

Tuttavia, come la temperatura comincia a scendere sotto questa soglia, i protoni sono favoriti ed il rapporto neutroni protoni cade esponenzialmente. Come abbiamo visto dalle 1.101, le interazioni di neutroni e protoni nell'universo primordiale coinvolgono anche dei neutrini. Queste interazioni sono deboli. La sezione d'urto per interazioni deboli mostra una dipendenza dalla temperatura: $\sigma_w \propto T^2$. Alle temperature da noi considerate questa sezione è molto piccola, assai minore della sezione d'urto dello scattering Thomson della forza elettromagnetica.

All'inizio l'universo è dominato dalla radiazione, e come abbiamo visto la temperatura diminuisce come $T \propto a(t)^{-1} \propto t^{-1/2}$, dunque la sezione d'urto delle interazioni deboli va come $\sigma_w \propto t^{-1}$. e la densità numerica dei neutrini come $n_\nu \propto a(t)^{-3} \propto t^{-3/2}$; perciò il tasso Γ col quale neutroni e protoni interagiscono debolmente coi neutrini decade rapidamente:

$$\Gamma = n_\nu c \sigma_w \propto t^{-5/2} \quad (1.104)$$

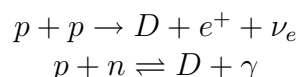
Il tasso di espansione dell'universo (o di Hubble) va come $H \propto t^{-1}$, allora all'istante in cui $\Gamma \approx H$, i neutrini si disaccoppiano da neutroni e protoni, ed il rapporto neutroni protoni rimane congelato, almeno fino a quando i neutroni incominciano a decadere (da $t = t + \tau_n$ in poi¹⁰). Con i dati disponibili possiamo stabilire che la temperatura di congelamento sia $T_c = 9 \times 10^9 \text{K}$, raggiunta quando l'universo aveva un secondo di vita ($t_c = 1 \text{s}$). Fra $t_c \leq t \leq \tau_n$ il rapporto neutroni protoni assume un valore pari a 0.2, esisteva perciò un neutrone ogni cinque protoni.

La scarsità di neutroni rispetto ai protoni ci fa dire che la BBN fu praticamente inefficiente: oggi circa il 75% in massa della materia barionica è ancora in forma di protoni liberi (1H), ed almeno il 24% di oggetti barionici, come stelle e nubi di gas, è composto da elio.

Deuterio ed elio

La nucleosintesi ha luogo con una serie di reazioni a due corpi, principalmente che, passo dopo passo, danno origine a nuclei sempre più pesanti, fino a che ogni neutrone libero sia legato in un nucleo.

Dopo il congelamento, neutroni e protoni reagiscono tra di loro formando dei nuclei di deuterio D. Le reazioni sono:



¹⁰In cui $\Gamma = H$

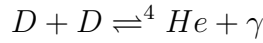
dove la prima è un'interazione debole e la seconda forte, di conseguenza quest'ultima è fortemente favorita sia perché la sezione d'urto forte è maggiore di quella debole, sia perché la prima reazione per avvenire deve superare la forza repulsiva tra cariche opposte.

Quando avviene, la seconda reazione rilascia un'energia pari a quella di legame del deuterio: $B_D = (m_n + m_p - m_D)c^2 = 2.22\text{MeV}$. Definiamo la temperatura precisa (T_D) alla quale ha luogo la nucleosintesi del deuterio, come quella temperatura per cui il rapporto $n_D/n_n = 1$. Assumendo un rapporto barioni fotoni quale scritto nella 1.100, otterremo la T_D dalla relazione:

$$1 \approx 6.5\eta_b \left(\frac{k_B T_D}{m_n c^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{B_D}{k_B T_D}} \quad (1.105)$$

che porta ad una temperatura $T_D \approx 7. \times 10^8 \text{K}$, alla quale corrisponde un'età dell'universo pari a $t_D = 200\text{s}$.

Due nuclei di deuterio possono poi formarne uno di elio (${}^4\text{He}$) grazie alla reazione:



oppure $D + D \rightleftharpoons {}^3\text{He} + n$, ${}^3\text{He} + n \rightleftharpoons {}^4\text{He} + \gamma$, ${}^3\text{He} + D \rightleftharpoons {}^4\text{He} + p$ e molte altre. Poi, via via, tutti gli altri nuclei leggeri cominciano a formarsi (${}^7\text{Li}$, ${}^8\text{Be}\dots$).

Risultato fondamentale della nucleosintesi primordiale degli elementi leggeri è la misura della frazione di elio primordiale (prima che iniziasse la nucleosintesi stellare) Y_p ¹¹. Possiamo stimarla grazie alla relazione:

$$Y_p = \frac{\rho({}^4\text{He})}{\rho_b} = \frac{2\frac{n_n}{n_p}}{\frac{n_n}{n_p} + 1} \simeq 0.25 \quad (1.106)$$

Avendo considerato che dopo τ_n il rapporto neutroni protoni scende a 0.15. Che risulta in ottimo accordo con la $Y_p \simeq 0.24$ ottenuta osservando oggetti astronomici di tipo differente. È questa una prova ulteriore della bontà del nostro modello standard di universo.

¹¹Dove p sta per primordiale

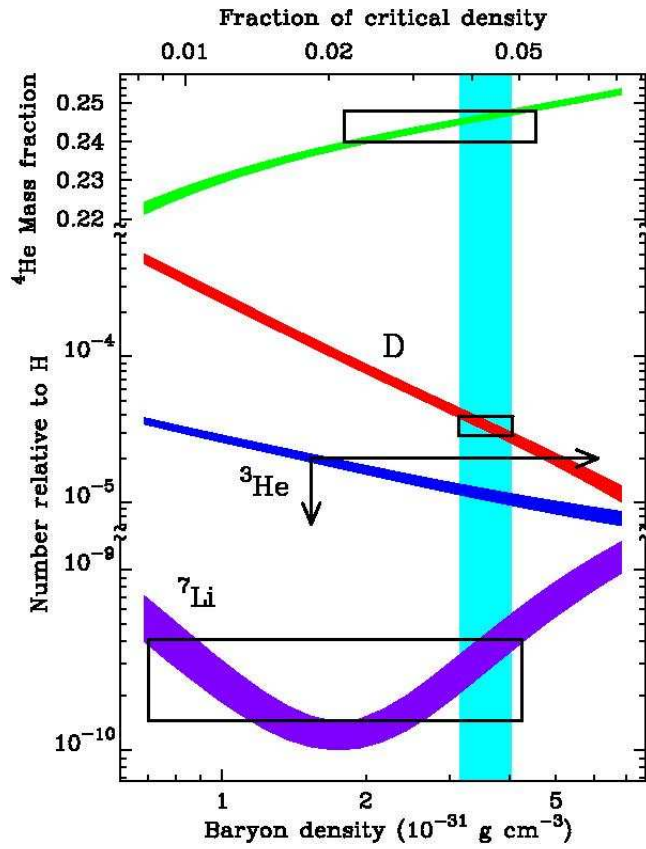


Figura 1.2: Vincoli alla densità dei barioni da misure di abbondanze degli elementi leggeri prodotti durante la nucleosintesi primordiale. LA banda verticale è fissata dalle misure del deuterio primordiale. I controni quadrati corrispondono alle osservazioni (per ^3He c'è solo un limite superiore) [22].

La densità dei barioni

Sempre dal rapporto barioni fotoni η_b è possibile ricavare la densità di barioni oggi. Questa risulta essere [34]:

$$\Omega_{0b} = \frac{\rho_{0b}}{\rho_{cr}} = \frac{n_b m_p c^2}{\rho_{cr}} = \frac{\eta_b n_\gamma m_p c^2}{\rho_{cr}} \approx 0.044 \quad (1.107)$$

Risulta evidente come la materia ordinaria (barioni) contribuisce al massimo per il 5% della densità critica. Siccome la densità totale di materia oggi, da stime certe, è dell'ordine del 30% , la nucleosintesi conferma l'ipotesi dell'esistenza della materia oscura.

1.10 La materia oscura

Il parametro di densità della materia Ω_{m0} ha una grande importanza in cosmologia. Anche se oggi non rappresenta più la componente dominante nell'universo, lo è stata nel recente passato; inoltre la conoscenza del valore di questo parametro ci aiuta a capire di cosa è fatto l'universo: quanta parte della materia dell'universo è sotto forma di stelle, gas, etc. Attualmente il valore misurato del parametro di densità della materia è $\Omega_{m0} = 0.3$. Vediamo ora le densità dei vari oggetti cosmici. Anche se sembrano tantissime, le stelle, non rappresentano che lo 0.5% del totale della materia dell'universo. Infatti il parametro di densità delle stelle, ricavato a partire dai dati forniti dalla teoria della formazione stellare, è [93]:

$$\Omega_{*0} = \frac{\rho_{*0}}{\rho_{cr}} \sim 0.004 \quad (1.108)$$

che può essere incrementato di poco includendo anche stelle deboli, nane brune ed altri oggetti di natura stellare. Anche le galassie e gli ammassi di galassie contengono materia barionica, soprattutto in forma di gas caldo [48], a temperature dell'ordine dei 10^6 K, non visibile ad occhio nudo perché osservabile nella zona X dello spettro della luce [28][4]. Tutti questi contributi formano la cosiddetta materia barionica ¹², che, come abbiamo visto, ha dei vincoli stringenti dati dalla nucleosintesi primordiale. Studi dettagliati [34] indicano che il parametro di densità della materia barionica 1.107 debba essere $\Omega_{b0} \simeq 0.00267$. Quindi tutta la materia barionica dell'universo rappresenta solo una minima parte della materia totale che quindi è di natura non barionica. Questa parte di materia non barionica risulta invisibile, ma indispensabile per spiegare molti fenomeni che senza di essa non potrebbero sussistere, e viene perciò chiamata *materia oscura*, con delle proprietà ben precise:

- non interagisce elettromagneticamente (quindi non emette fotoni)
- è priva di collisioni interne (materia acollisionale)

Un modo per rilevare la presenza di materia oscura è guardare alla sua influenza gravitazionale sulla materia visibile. Per esempio si veda [31]. Invece, un metodo classico è quello di misurare la velocità orbitale delle stelle nelle galassie a spirale, che contengono dei dischi piatti di stelle che percorrono orbite quasi circolari. Consideriamo una stella in orbita, con velocità v e raggio R , intorno al centro di una galassia; la stella sente un'accelerazione:

$$\dot{v} = \frac{v^2}{R}$$

¹²Tra cui vengono considerati anche gli elettroni

diretta verso il centro della galassia, e originata dalla attrazione gravitazionale della materia contenuta in una sfera di raggio R :

$$\dot{v} = \frac{GM(R)}{R^2} \quad (1.109)$$

eguagliando le due espressioni precedenti otteniamo la relazione che lega la velocità alla massa:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2} \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}} \quad (1.110)$$

Se la materia luminosa rappresentasse tutta la materia presente nell'universo, la velocità dovrebbe diminuire come $v \propto 1/\sqrt{R}$ allontanandosi dal centro della galassia. Tuttavia così non è, anzi quello che si osserva sperimentalmente è che la velocità rimane costante anche a grandi R , con valori molte volte superiori a quelli calcolati tenendo conto della sola materia luminosa. Questo prova l'esistenza di una forma di materia non rivelabile responsabile della curva di rotazione delle galassie. Lo stesso vale per la materia presente negli ammassi di galassie [8]. Zwicky per primo, partendo dal teorema del viriale [7], che lega l'energia potenziale dell'ammasso $T = M \langle v^2 \rangle / 2$ con la sua energia potenziale gravitazionale $U = GM^2/2R$, in condizioni di equilibrio statistico:

$$2T + U = 0 \quad (1.111)$$

ottenne una stima della massa $M \propto R \langle v^2 \rangle / G$, dalla quale, misurando la dispersione di velocità delle galassie nell'ammasso COMA, si accorse che c'era una quantità maggiore di materia rispetto a quella stimata solo con la materia luminosa.

In altre parole, per giustificare l'esistenza dell'ammasso è necessaria molta più materia di quella osservabile. Un altro metodo per stimare l'ammontare di materia oscura, è attraverso gli effetti gravitazionali che ha sulla materia luminosa, come abbiamo appena visto. Ma la presenza di materia oscura non interferisce solo con la traiettoria delle particelle di materia, ma anche con i fotoni. Cioè può agire da lente gravitazionale, magnificando o demagnificando le sorgenti luminose. Le stime della massa degli ammassi ottenute seguendo questo metodo risultano consistenti con quelle trovate a partire dal teorema del viriale.

Ma alla fine tutte queste misure mostrano solo una cosa: che nel nostro universo c'è della materia invisibile che rappresenta la stragrande maggioranza della materia dell'universo [77]. Infatti il parametro di densità della materia oscura è: $\Omega_c \simeq 0.21$ [33].

Materia oscura calda e fredda

Ma di cosa è composta la materia oscura?

Questo è un quesito che ancora non ha trovato soluzione. Possiamo però distinguere tra due tipi di materia oscura: quella calda (HDM: dall'inglese Hot Dark Matter) e quella fredda (CDM: Cold Dark Matter). La CDM è formata da particelle con velocità termiche non relativistiche, al contrario la HDM è composta da particelle altamente relativistiche. Bisogna notare che nell'universo è presente quasi esclusivamente materia oscura fredda che consente la formazione di strutture cosmiche, mentre quella calda, per le sue velocità prossime a quelle della luce, non lo avrebbe permesso. Comunque, anche se i modelli di universo considerati sono Λ CDM, una piccolissima parte di HDM esiste sotto forma di un fondo di neutrini che però non giocano un ruolo dominante nel determinare le proprietà di clustering dell'universo, data l'evidenza che i neutrini abbiano una seppur piccola massa ($\sum m_\nu \leq 1.3\text{eV}$) [37].

1.11 Problemi del modello cosmologico standard

Il modello standard dell'universo detto Hot Big Bang model, ha ricevuto tante conferme sperimentali: su tutte, quelle derivanti dalla nucleosintesi primordiale. Tuttavia si presentano dei problemi [58], che vengono risolti grazie alla teoria, non dimostrata sperimentalmente, detta dell'*inflazione*.

Il problema dei monopoli magnetici

Nel corso della sua evoluzione, l'universo ha attraversato una spontanea rottura di simmetria all'epoca (ad un'età di 10^{-35} s) della transizione di fase GUT (Great Unification Theory), che avviene quando l'universo raggiunge una temperatura $T_{GUT} \simeq 10^{15}$ GeV. L'universo si è mosso quindi da una fase disordinata ad una ordinata caratterizzata da un parametro d'ordine $\phi \neq 0$, che viene identificato col campo di Higgs. Durante questa transizione di fase numerosi monopoli magnetici (difetti topologici zero-dimensionali) vengono generati. Considerate le energie in gioco, i monopoli dovrebbero mostrare un parametro di densità:

$$\Omega_M > \frac{m_M}{m_p} \Omega_b \simeq 10^{16} \quad (1.112)$$

Dove m_M è la massa dei monopoli, che dovrebbe essere grandissima. Come si vede questo valore è assurdamente alto: dovrebbe dominare ancor'oggi l'universo, ma così non è.

Il problema degli orizzonti

Si definisce orizzonte ad un tempo t_0 , la distanza comobile percorsa dalla luce dal Big bang al tempo t_0 :

$$R_H(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.113)$$

Che attualmente è di ≈ 14000 Mpc. Andando a tempi sempre più piccoli, nell'epoca dominata dalla materia l'orizzonte diminuisce fino ad arrivare, alla superficie di ultimo scattering, ad avere un valore di ≈ 0.4 Mpc. Si può dimostrare che tutti i punti che possiamo osservare distanti tra loro più di 2° , non erano in contatto causale tra loro all'ultimo scattering. Allora com'è possibile che le mappe della radiazione di fondo cosmico (CMB) mostrino una altissima isotropia ed omogeneità, e che scale che sono entrate in contatto solo ora abbiano la stessa temperatura?

Il problema della piattezza

Come abbiamo visto nel paragrafo 1.8.1, in un universo descritto dalla metrica FRW, se il parametro di densità totale è $\Omega_{tot} = 1$ (universo piatto) ora, sarà lo stesso per tutti i tempi. Però con l'espandersi dell'universo, la soluzione di universo piatto risulta instabile, e l'universo tende a diventare leggermente curvo. Oggi il parametro di curvatura è circa zero: $|1 - \Omega(t_0)| \approx 0$, ma in tempi passati, per esempio all'equivalenza tra radiazione e materia, era $|1 - \Omega(t_r, m)| \approx 10^{-4}$, continuando così, al tempo di Planck, in cui l'universo aveva un'età $t_P \simeq 10^{-46}$ s, si ottiene:

$$|1 - \Omega(t_P)| \approx 10^{-60}$$

Ma non esiste nessuna giustificazione fisica per cui, nella sua evoluzione, l'universo abbia dovuto scegliere un parametro così prossimo a 1 per far sì che lo sia anche adesso.

1.12 L'inflazione

Fu A. Guth nel 1981 il primo a proporre un nuovo meccanismo, chiamato inflazione, per risolvere i problemi della piattezza, degli orizzonti e dei

monopoli. Bisogna dire che questo modello descrive solo la primissima parte della vita dell'universo, non inficiando la teoria successiva di formazione delle strutture, che rimane dunque valida e funzionante. La teoria prevede che ad un'età dell'universo pari a 10^{-36} s, parta un'espansione accelerata del fattore di scala che si fermi per un'età di 10^{-32} s. Una fase durata quindi nel complesso 10^{-34} s, tempo durante il quale l'universo si è espanso di un fattore 10^{30} : enorme. Alla fine di questo meccanismo l'evoluzione procede come fin qui descritto in questo capitolo.

1.12.1 La dinamica dell'inflazione

Durante la fase espansiva si ha $\ddot{a} > 0$, che con riferimento all'equazione di accelerazione 1.45, comporta, assumendo una densità positiva, che:

$$(3P + \rho) < 0 \quad (1.114)$$

Ciò significa avere una pressione negativa, come se l'istantanea espansione fosse dovuta ad una specie di costante cosmologica. L'espansione esponenziale, detta inflazione, viene descritta da un campo scalare ϕ , assunto omogeneo ed isotropo spazialmente, dipendente solo dal tempo. Scriviamo ora la pressione e la densità del campo:

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (1.115)$$

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (1.116)$$

Dove $V(\phi)$ è il potenziale associato al campo. Sostituendo queste due espressioni nella 1.114, otteniamo la condizione:

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi) \quad (1.117)$$

Per questo modello le equazioni di Friedmann si scrivono:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_\phi + \rho) - \frac{K}{a^2} \quad (1.118)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}[\rho_\phi + \rho + 3(P_\phi + P)] \quad (1.119)$$

L'evoluzione di ϕ si ricava dall'equazione del moto per un campo scalare, dove L_ϕ è la lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(L_\phi a^3)}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial(L_\phi a^3)}{\partial \phi} = 0 \quad (1.120)$$

che porta alla relazione:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = -\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \quad (1.121)$$

simile a quella che descrive una pallina che si muove sotto l'azione del termine forzante, frenata dal secondo termine (di frizione). Generalmente viene assunto che ϕ proceda verso un minimo del potenziale ϕ_0 (per cui $V(\phi_0) = 0$) molto lentamente: condizione detta di *slow-roll*, per cui vale la 1.117. Nel regime di *slow-roll* l'equazione di Friedmann 1.119 si presenta, siccome l'espansione rapida fa sì che la densità ρ e la curvatura K siano trascurabili, come:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \simeq \frac{8\pi G}{3}V(\phi) \quad (1.122)$$

la cui soluzione è:

$$a \propto \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (1.123)$$

con:

$$\tau \simeq \left[\frac{3}{8\pi G V(\phi)}\right]^{1/2} \approx 10^{-34} \text{ s} \quad (1.124)$$

che è la durata della fase inflazionaria. Ogni eventuale inomogeneità o anisotropia presente prima dell'espansione sarà cancellata e se ne perderà ogni memoria. Questa proprietà è chiamata *cosmic no hair theorem*. L'equazione 1.120, in condizioni di *slow-roll* si scrive:

$$3H\dot{\phi} = -\frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (1.125)$$

Vogliamo che il potenziale cambi poco, la condizione per cui questo avviene è $\epsilon \ll 1$, con il parametro di *slow-roll* ϵ dato da:

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{dV(\phi)/d\phi}{V(\phi)}\right) \quad (1.126)$$

L'ammontare dell'inflazione è dato, nell'intervallo di durata dell'inflazione (t_i, t_f) , dal *numero di e-foldings*:

$$\mathcal{N} = \ln \left[\frac{a(t_f)}{a(t_i)}\right] \simeq -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_f} \left(\frac{d\ln V(\phi)}{d\phi}\right)^{-1} d\phi \quad (1.127)$$

Che ha un valore di ≈ 100 . L'inflazione finisce, a t_f , quando $\epsilon \approx 1$.

1.12.2 La soluzione dei problemi

Descriviamo ora brevemente le soluzioni che la teoria dell'inflazione permette di applicare ai problemi del modello standard che abbiamo visto precedentemente.

La soluzione al problema dei monopoli

I monopoli, che vengono creati prima o durante l'inflazione, vengono diluiti per effetto dell'espansione esponenziale, la loro densità infatti va come:

$$n_M \propto e^{-3\mathcal{N}} \quad (1.128)$$

con $\mathcal{N} \approx 100$. Così da un valore originario $n_M(t_{GUT}) \approx 10^{82} \text{m}^{-3}$ al tempo della GUT, si arriva ad avere oggi una densità bassissima, pari a $n_M(t_0) \approx 10^{-61} \text{Mpc}^{-3}$. Si spiega così il perché oggi non si osservano monopoli.

La soluzione al problema degli orizzonti

Considerando un universo dominato dalla radiazione, com'era quello in cui sarebbe avvenuta l'inflazione, si può vedere come, prima dell'espansione, l'orizzonte era $R_H(t_i) = 2t_i$, mentre dopo diventa $R_H(t_f) = e^{\mathcal{N}}(2t_i + H_i^{-1})$, con $\mathcal{N} = H_i(t_f - t_i) \approx 100$. Dove H_i caratterizza l'espansione dell'universo e se consideriamo, come abbiamo già detto, che l'inflazione sia guidata da una specie di costante cosmologica, abbiamo $H_i = \sqrt{\Lambda/3}$. Per un parametro di Hubble $H_i \simeq 10^{-36} \text{s}^{-1}$, ed il valore di \mathcal{N} considerato, si ha:

$$R_H(t_i = 10^{-36} \text{ s}) \approx 6 \cdot 10^{-28} \text{ m} \quad (1.129)$$

$$R_H(t_f = 10^{-32} \text{ s}) \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ m} \quad (1.130)$$

Quindi, regioni che erano in contatto causale prima dell'inflazione, e che dunque si erano portate all'equilibrio termico, a seguito della gigantesca espansione, si ritrovano non più in contatto. Così possiamo spiegare il perché oggi vediamo regioni appena entrate in connessione mostrare la stessa temperatura.

La soluzione al problema della piattezza

Come abbiamo visto, nel modello cosmologico standard, la differenza $|1 - \Omega(t)|$ cresce nel tempo, allontanandosi sempre più dallo 0. Durante la fase inflazionaria, la condizione di accelerazione $\ddot{a} = \frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0$, sostituita nella 1.54, esplicita il fatto che, più il tempo passa, più Ω_{0tot} è prossimo a 1, e

l'universo è sempre più piatto. Se eguagliamo le differenze considerate prima e dopo l'inflazione, otteniamo:

$$|1 - \Omega(t_f)| = e^{-2\mathcal{N}} |1 - \Omega(t_i)| \quad (1.131)$$

Dalla quale, se si considera che all'inizio dei tempi era $|1 - \Omega(t_i)| \approx 1$, cioè con una grande curvatura, con $\mathcal{N} \approx 100$, si ha $|1 - \Omega(t_f)| \approx 10^{-87}$: un valore che permette ancor oggi all'universo, dopo la fase inflazionaria, e l'espansione ancora in corso, di possedere un valore del parametro totale di densità molto prossimo all'unità.

Capitolo 2

La radiazione cosmica di fondo

Nel 1965 A. Penzias e R. Wilson trovarono, durante delle misurazioni, un fondo di radiazione nella zona dello spettro elettromagnetico corrispondente alle microonde; All'inizio pensarono ad un errore strumentale o ad una forma di rumore, ma esaminando con accuratezza tutte le possibili fonti di rumore ed incertezza strumentale il fondo di radiazione persisteva. Inoltre, andando avanti con le misurazioni, si accorsero che mostrava una perfetta isotropia ed omogeneità. Questa radiazione venne definita fondo di radiazione cosmica a microonde (Cosmic Microwave Background). Il primo ad ipotizzare l'esistenza di questa radiazione fu Gamow; egli ipotizzò che essa fosse un residuo di una fase, di poco posteriore al Big Bang, in cui l'universo era molto caldo e denso. Essendo una radiazione fortemente termica, doveva essere prodotta in condizioni di equilibrio termico fra materia e radiazione, condizioni assai lontane da quelle che osserviamo oggi, rintracciabili soltanto nell'universo primordiale. In questo capitolo ci occuperemo delle caratteristiche della CMB e del suo spettro di potenza, di cui analizzeremo la forma e l'origine.

2.1 Epoche caratteristiche

Per meglio comprendere l'origine della CMB, esaminiamo i processi grazie ai quali la materia barionica, da plasma ionizzato, diviene un gas di atomi neutri, e l'universo da opaco diventa trasparente. Distinguiamo tre epoche, vicine tra loro, nella storia dell'universo [93]:

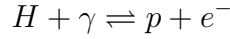
- *Ricombinazione*

è il tempo in cui la componente barionica dell'universo passa dall'essere totalmente ionizzata ad essere neutra. Possiamo definirlo come l'istante

in cui la densità numerica degli ioni è uguale a quella degli atomi neutri. Il grado di ionizzazione della componente barionica dell'universo può essere espresso dalla *frazione di ionizzazione* X :

$$X = \frac{n_p}{n_p + n_H} = \frac{n_p}{n_b} = \frac{n_e}{n_b} \quad (2.1)$$

avendo assunto, per semplicità, che la componente barionica dell'universo consista solo di idrogeno (H), e dove sono coinvolte le densità numeriche di protoni, elettroni ed idrogeno. X varia tra 1 (universo ionizzato) a 0 (universo di atomi neutri). Nell'universo primordiale esiste un equilibrio tra barioni e fotoni:



Dalle equazioni di Maxwell-Boltzmann 1.102, ricaviamo l'*equazione di Saha* per le specie in considerazione:

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{-3/2} e^{Q/k_B T} \quad (2.2)$$

Con $Q = 13.6$ eV che è l'energia di ionizzazione di un atomo di idrogeno. Dalla 2.1 otteniamo:

$$n_H = \frac{1 - X}{X} n_p \quad (2.3)$$

Il rapporto barioni fotoni (vedi paragrafo 1.9.3) può essere riscritto in modo che $\eta_b = \frac{n_b}{n_\gamma} = \frac{n_p}{X n_\gamma}$. Utilizzando questa nuova espressione ricaviamo:

$$\frac{1 - X}{X^2} \propto \eta_b \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{3/2} e^{Q/k_B T} \quad (2.4)$$

E, se assumiamo che la ricombinazione ha luogo a $X = \frac{1}{2}$, per $\eta_b = 5.5 \times 10^{-10}$ arriviamo ad avere una temperatura di ricombinazione $T_{rec} = 3740$ K; questa temperatura è raggiunta dall'universo ad un redshift $z_{rec} = 1370$ che corrisponde ad un'età dell'universo di $t_{rec} = 240000$ anni dopo il big bang. La ricombinazione tuttavia non è un processo istantaneo, anche se molto rapido: impiega circa 70000 anni per compiersi.

- *Disaccoppiamento*

è il tempo in cui il tasso di scattering dei fotoni sugli elettroni diventa

più piccolo del parametro di Hubble che misura il tasso di espansione dell'universo. In un universo completamente ionizzato l'interazione principale tra fotoni ed elettroni è:

$$\gamma + e^- \rightleftharpoons \gamma + e^-$$

con un tasso di scattering, dato in funzione del redshift, che è:

$$\Gamma(z) = n_e(z)\sigma_e c = X(z)(1+z)^3 n_b \sigma_e c \quad (2.5)$$

Quando la ricombinazione ha luogo l'universo è dominato dalla materia, per cui il parametro di Hubble si ottiene dalla relazione:

$$\frac{H(z)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m0}}{a^3} = \Omega_{m0}(1+z)^3 \quad (2.6)$$

Sostituendo i valori di $\Omega_{b0} \approx 0.04$ ed $\Omega_{m0} \approx 0.4$, il redshift a cui avviene il disaccoppiamento si ottiene dall'eguaglianza $\Gamma(z_{dec}) = H(z_{dec})$. Dalla quale:

$$1 + z_{dec} = \frac{43}{X(z_{dec})^{2/3}}$$

Che usando il valore di $X(z)$ dato dall'equazione di Saha, porta ad un redshift per il disaccoppiamento pari a $z_{dec} \approx 1100$, corrispondente ad una temperatura di $T_{dec} \approx 3000$ K, raggiunta quando l'universo possedeva un'età di $t_{dec} \approx 350000$ anni. Quando i fotoni si disaccoppiano, cessano di interagire con gli elettroni, di conseguenza, l'universo diviene trasparente.

- *Ultimo scattering*

è il tempo a cui un fotone della CMB subisce il suo ultimo scattering da parte degli elettroni liberi del plasma primordiale. Ogni osservatore nell'universo è dunque circondato da una superficie di ultimo scattering dalla quale i fotoni si sono liberamente propagati senza più interagire con gli elettroni. I fotoni CMB che rileviamo hanno viaggiato fino a noi dal tempo dell'ultimo scattering. Dunque, se misuriamo un fotone ad un tempo t_0 , il numero di scattering che ci spettiamo il fotone abbia subito da un tempo iniziale t è:

$$\tau(t) = \int_t^{t_0} \Gamma(t) dt \quad (2.7)$$

Che è lo *spessore ottico*. Il tempo t_{ls} per cui $\tau = 1$, cioè in cui l'universo diventa trasparente, è il tempo dell'ultimo scattering: il tempo passato

dall'ultima volta che un fotone ha interagito con un elettrone libero. Cambiando variabile d'integrazione nella 2.7, prima in da (sapendo che $H = \dot{a}/a$) e poi in dz , con $(1+z) = 1/a$, troviamo:

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{\Gamma(z)}{H(z)} \frac{dz}{1+z} \propto \int_0^z X(z)(1+z)^{1/2} dz \quad (2.8)$$

Dove abbiamo usato le relazioni per $\Gamma(z)$ ed $H(z)$ trovate prima. Con buona approssimazione possiamo stabilire che $z_{ls} \approx z_{dec} \approx 1100$. Tuttavia non tutti i fotoni interagiscono per l'ultima volta con gli elettroni nello stesso istante. Quindi più che di una superficie di ultimo scattering dovremmo parlare di una buccia.

Bisogna far notare che queste tre epoche si susseguono dopo l'equivalenza tra radiazione e materia, perciò in un universo da questa dominato. Inoltre è fondamentale osservare che i valori di redshift, tempi e temperature appena riportate sono dipendenti dal modello cosmologico scelto. Nel nostro caso il modello è quello standard Λ CDM illustrato nel primo capitolo.

L'epoca del disaccoppiamento è importantissima nella storia dell'universo: prima, il forte accoppiamento tra la materia barionica ed i fotoni tende a smussare ogni possibile fluttuazione di densità nel plasma. Dopo il disaccoppiamento troviamo due gas distinti: quello dei barioni e quello dei fotoni. Da quel momento in avanti la componente barionica è libera di collassare sotto la sua stessa gravità (anche con l'influenza della materia oscura) e formare le strutture cosmiche che noi oggi possiamo osservare: galassie, stelle, pianeti, etc.

2.2 Proprietà della CMB

Come abbiamo detto Penzias e Wilson misurarono per la prima volta la radiazione di fondo cosmico nel 1965, utilizzando un'antenna per captare delle microonde. Essi trovarono un fondo di microonde isotropo, che misurato molto più accuratamente dal satellite COBE nel 1992, si è rivelato avere un perfetto spettro di un corpo nero. Il cui flusso di energia tra $(\nu, \nu + d\nu)$, è descritto dalla funzione di Planck [62]:

$$P(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T_0} - 1} d\nu \quad (2.9)$$

con temperatura pari a:

$$T_0 = (2.725 \pm 0.001) \text{ K} \quad (2.10)$$

con una densità di energia dei fotoni CMB pari a:

$$\rho_\gamma = 4.17 \times 10^{-14} \text{ Jm}^{-3} \quad (2.11)$$

ed una densità numerica di fotoni CMB

$$n_\gamma = 411\gamma/cm^3 \quad (2.12)$$

Per cui l'energia media per fotone è molto bassa, circa $E_{mean} = 6.34 \times 10^{-4}$ eV, che corrisponde ad una lunghezza d'onda di circa 2 mm, dunque nella regione delle microonde dello spettro elettromagnetico.

L'esistenza della CMB è molto importante dal punto di vista cosmologico: costituisce la prova fondamentale a favore del modello dell'Hot Big Bang. In questo modello una radiazione di fondo emerge naturalmente se l'universo era inizialmente estremamente caldo e denso. Se in un universo in espansione la massa si conserva, allora nel passato l'universo era più denso rispetto ad oggi. Nell'universo primordiale, per temperature dell'ordine di $T \gg 10^4$ K, $k_B T \gg 1$ eV, la materia barionica è completamente ionizzata, e gli elettroni liberi rendono opaco l'universo. Un corpo denso, caldo ed opaco, produce radiazione di corpo nero. Tuttavia con l'espandersi, l'universo si raffredda. Quando la temperatura scende sotto i 3000 K comincia l'epoca della ricombinazione di ioni ed elettroni per formare atomi neutri. E con il diminuire del numero di elettroni liberi, la radiazione inizia a viaggiare libera per l'universo senza subire più nessuna collisione (epoca del disaccoppiamento). Quindi da una temperatura iniziale di circa 3000 K si arriva a misurarne oggi una di circa 2.7 K. Questo perché la temperatura segue la legge 1.86 e cala con l'inverso del fattore di scala.

In sostanza la CMB può essere interpretata come un residuo del tempo in cui l'universo era sufficientemente caldo e denso da apparire opaco.

2.2.1 Il satellite COBE

La CMB è stata misurata accuratamente, su un vasto intervallo di lunghezze d'onda, per la prima volta dal satellite COBE (COsmic Background Explorer) lanciato nel 1989. Il satellite conteneva tre diversi esperimenti: DIRBE (Diffuse InfraRed Background Experiment), costruito per misurare radiazione a lunghezze d'onda $0.001 \text{ mm} < \lambda < 0.24 \text{ mm}$, dunque radiazione proveniente principalmente da stelle e gas della nostra galassia; FIRAS (Far InfraRed Absolute Spectrophotometer), usato per misurare lo spettro della CMB nell'intervallo $0.1 \text{ mm} < \lambda < 10 \text{ mm}$, intervallo che include il picco dello spettro CMB; DMR (Differential Microwave Radiometer), progettato per

costruire delle mappe su tutto il cielo della CMB per tre lunghezze d'onda differenti: 3.3 mm, 5.7 mm, 9.6 mm.

Gli esperimenti ospitati in questo satellite hanno permesso di ottenere tre importanti risultati sulla CMB:

1. Come già detto, in qualsiasi posizione angolare (ϑ, φ) nel cielo, lo spettro della CMB è quasi perfettamente identico ad uno spettro di perfetto corpo nero a temperatura $T_0 = (2.725 \pm 0.001)$ K.
2. Nelle mappe della temperatura della CMB è presente una distorsione di dipolo, non di origine cosmologica, ma dovuta al moto del satellite COBE rispetto ad un sistema di riferimento in cui la CMB è isotropa: è un semplice spostamento Doppler e può essere rimossa.
3. Una volta rimossa la distorsione di dipolo e l'emissione del piano galattico, le rimanenti fluttuazioni di temperatura sono di piccola ampiezza.

Se la temperatura della CMB in una generica posizione nel cielo (ϑ, φ) è $T(\vartheta, \varphi)$, e $\langle T \rangle = 2.725$ K la temperatura mediata su tutte le posizioni, allora le fluttuazioni di temperatura sono espresse, per ogni dato punto del cielo, dalla relazione:

$$\frac{\delta T}{T}(\vartheta, \varphi) = \frac{T(\vartheta, \varphi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle} \quad (2.13)$$

Dalle mappe del cielo fatte da DMR si è trovato che le fluttuazioni quadratiche medie sono dell'ordine:

$$\left\langle \left(\frac{\delta T}{T} \right)^2 \right\rangle^{1/2} = 1.1 \times 10^{-5} \quad (2.14)$$

che mostrano chiaramente la grande isotropia della radiazione di fondo cosmico.

2.3 Le anisotropie della CMB

Le anisotropie della CMB [54] forniscono un gran numero di informazioni sulla fisica dell'universo all'ultimo scattering. I processi fisici che hanno luogo a quell'epoca produrranno le cosiddette *anisotropie primarie*, mentre tutti i processi che si verificano tra l'ultimo scattering ed oggi sono alla base delle *anisotropie secondarie*, che possono modificare, anche in modo consistente, quelle primarie.

Andremo a trattare ora [11] il comportamento del fluido di barioni e fotoni,

fortemente accoppiati tra loro almeno fino alla ricombinazione, in presenza di piccole perturbazioni, ipotesi questa di fondamentale importanza ai fini della formazione delle anisotropie della radiazione di fondo.

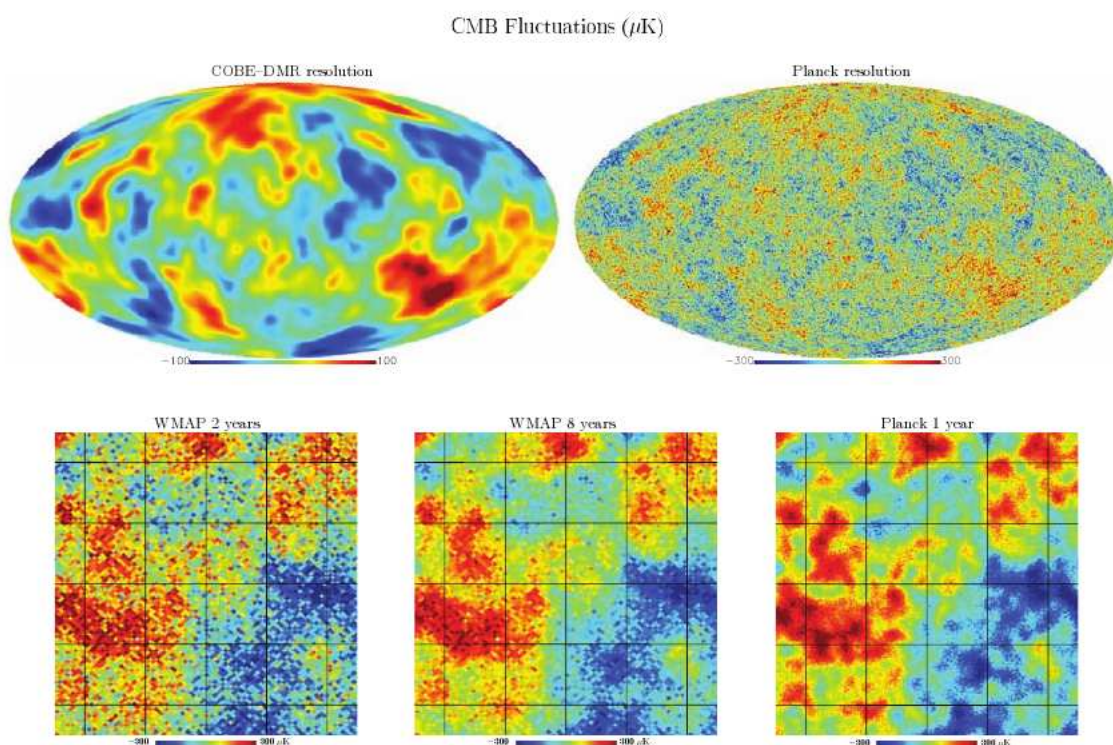


Figura 2.1: Confronto delle mappe delle anisotropie di temperatura della CMB ottenute dalle missioni satellitari: per prima COBE nel 1992, poi WMAP nel 2001, quindi le previsioni per Planck, lanciato nel maggio di quest'anno.

2.3.1 La teoria lineare

Se escludiamo gli effetti non lineari [45], che si verificano a basso redshift, i calcoli delle anisotropie possono essere svolti seguendo la teoria lineare. Tutte le quantità rilevanti possono essere trattate come piccole perturbazioni intorno ad una soluzione omogenea che segue il modello di Friedmann-Robertson-Walker. Dunque, quella che prenderemo in considerazione sarà una metrica con perturbazioni intorno al modello omogeneo descritto dalla metrica FRW

1.16; seguendo la *gauge newtoniana*:

$$\begin{aligned}
 g_{00}(\mathbf{x}, t) &= -1 - 2\Psi(\mathbf{x}, t) \\
 g_{0i}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\
 g_{ij}(\mathbf{x}, t) &= a(t)^2 \delta_{ij} (1 + 2\Phi(\mathbf{x}, t))
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Dove, oltre al fattore di scala, compaiono due nuove funzioni: Ψ e Φ . Rispettivamente esse rappresentano il potenziale newtoniano e la perturbazione alla curvatura spaziale. Le tratteremo alla stregua di piccole quantità.

In un universo dominato da materia oscura fredda (Cold Dark Matter) come il nostro, oltre a Ψ e Φ , vengono prese in considerazione le seguenti variabili:

- $\delta_b = \delta\rho_b/\rho_b$: densità delle perturbazioni barioniche
- $\delta_c = \delta\rho_c/\rho_c$: perturbazioni nella densità della CDM
- v_b : campo di velocità peculiare dei barioni
- v_c : campo di velocità peculiare della CDM
- f_γ : funzione di distribuzione nello spazio delle fasi dei fotoni
- f_ν : funzione di distribuzione nello spazio delle fasi dei neutrini

dove il pedice c sta per CDM. Tutte dipendono dalla posizione \mathbf{x} e dal tempo t ; f_γ ed f_ν invece dipendono anche dall'impulso.

È possibile separare le perturbazioni in tre tipi di categorie: scalari, vettoriali e tensoriali. Notiamo che la metrica (2.15) contiene solo termini scalari. Se la metrica contenesse anche termini non scalari, servirebbero altre funzioni, oltre a Φ e Ψ , per descrivere le perturbazioni e gli elementi fuori la diagonale non sarebbero più nulli. Anche se i modelli inflazionari predicono l'esistenza di perturbazioni tensoriali, per ora ci concentreremo solo su quelle scalari, che sono più importanti dal punto di vista dell'accoppiamento tra materia e fotoni.

L'evoluzione delle quantità sopra riportate è governata da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Per le specie non relativistiche usiamo le equazioni della teoria lineare delle perturbazioni, che sono le equazioni di continuità, di Eulero e di Poisson, che per un universo dominato

dalla CDM possono essere scritte come:

$$\dot{\delta}_c + \nabla \cdot \mathbf{v}_c = 0 \quad (2.16)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_c + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v}_c = -\frac{1}{a^2}\nabla\Psi \quad (2.17)$$

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G\bar{\rho}\delta_c \quad (2.18)$$

Dove a è il fattore di scala, $\bar{\rho}$ è la densità media e dove la derivazione temporale è espressa da un punto. Inoltre tutte le derivate spaziali sono calcolate rispetto alle coordinate comobili. Le stesse equazioni devono essere calcolate anche per i barioni, in particolare, l'equazione di Poisson per i barioni contiene un termine di pressione aggiuntivo.

Per poter procedere nella derivazione delle anisotropie è necessario risolvere numericamente il sistema di equazioni su scritto. È conveniente lavorare nello spazio di Fourier poiché i modi di fluttuazioni differenti sono disaccoppiati, e la soluzione è semplificata. Scriviamo:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.19)$$

lo stesso per le altre quantità. Il fatto che possiamo lavorare con un solo modo alla volta rende più semplice dare una spiegazione qualitativa delle anisotropie della CMB.

Assumiamo che, alla fine dell'epoca dominata dalla radiazione, la maggior parte della massa presente nell'universo sia sotto forma di CDM, dunque $\Omega_b \ll \Omega_c$. In questo modo il potenziale Ψ è completamente determinato dalla CDM, e le equazioni del sistema 2.18 possono essere risolte trascurando il comportamento delle altre specie. Se conosciamo il potenziale Ψ , possiamo risolvere per l'evoluzione di fotoni e barioni.

Il sistema può essere compresso in una equazione differenziale omogenea del secondo ordine in δ (per una derivazione completa vedi [58]):

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = 0 \quad (2.20)$$

Possiamo distinguere due diversi regimi per le soluzioni di questa equazione.

- quando l'universo è dominato dalla radiazione, l'ultimo termine dell'equazione è trascurabile, così si ottengono due soluzioni indipendenti e lineari:

$$\begin{aligned} \delta &= \text{cost} \\ \delta &\propto \ln t \end{aligned} \quad (2.21)$$

dunque la crescita delle perturbazioni è molto piccola nell'universo primordiale.

- quando l'universo è dominato dalla materia (radiazione e curvatura trascurabili nell'equazione di Friedmann), allora il fattore di scala crescerà come $a \propto t^{2/3}$, e le soluzioni saranno allora:

$$\begin{aligned}\delta &= t^{2/3} \propto a \\ \delta &\propto t^{-1}\end{aligned}\tag{2.22}$$

L'unica soluzione da considerare per l'universo, a tempi recenti, è quella crescente, che, se inserita nell'equazione di Poisson, fa sì che il potenziale Ψ sia indipendente dal tempo: questo porta a conseguenze molto importanti, come vedremo in seguito.

2.3.2 Le perturbazioni al fluido foto-barionico

Le specie relativistiche (descritte da f_γ ed f_ν) invece, non sono caratterizzate da un semplice campo di velocità, ma da una funzione di distribuzione la cui evoluzione è governata dall'equazione di Boltzmann [22]:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt} = C[f]\tag{2.23}$$

Dove p è il modulo dell'impulso, \hat{p}^i è la direzione del coseno dell'impulso, e $C[f]$ è un termine di collisione che tiene in considerazione le interazioni da scattering Compton tra elettroni liberi e fotoni prima del disaccoppiamento. Per convenzione stabiliamo che una regione sovradensa avrà $\Psi, \Phi < 0$.

Per una trattazione dettagliata della derivazione delle perturbazioni vedi [22]. Nell'ottica di esprimere la derivata totale come somma di derivate parziali, calcoliamo con la metrica perturbata il quadrimpulso p , e riscriviamo tutte le quantità che dipendono da altre. Così possiamo riscrivere l'equazione 2.23 come:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - p \frac{\partial f}{\partial p} \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right)\tag{2.24}$$

Questa equazione ci mostra molta della fisica alla quale siamo interessati. I primi due termini alla destra dell'uguale, che vengono dall'idrodinamica, se integrati conducono rispettivamente all'equazione di continuità ed a quella di Eulero. Il terzo termine esprime la perdita di energia di un fotone nell'universo in espansione. Gli ultimi due termini codificano gli effetti delle regioni sovra o sottodense.

L'equazione di Boltzmann per i fotoni

I fotoni sono dei bosoni, descritti quindi dalla funzione di distribuzione di Bose-Einstein:

$$f(\mathbf{x}, p, \hat{p}, t) = \left[\exp\left(\frac{p}{T(t)[1 + \Theta(\mathbf{x}, \hat{p}, t)]}\right) - 1 \right]^{-1} \quad (2.25)$$

Dove Θ rappresenta la fluttuazione di temperatura:

$$\Theta = \frac{\delta T}{T} \quad (2.26)$$

Per piccole fluttuazioni, come sono quelle della temperatura della CMB, la 2.25 può essere espansa in serie; al primo ordine si ha:

$$f = f^{(0)} - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta \quad (2.27)$$

Dove $f^{(0)} = [\exp(p/T) - 1]^{-1}$ è la distribuzione di Bose-Einstein con potenziale chimico nullo. Utilizzando questa espressione, la 2.24 diventa:

$$\frac{df}{dt} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] \quad (2.28)$$

Veniamo ora al calcolo del termine di collisione $C[f]$. Fotoni ed elettroni sono fortemente accoppiati attraverso lo *scattering Compton*:

$$e^-(\mathbf{q}) + \gamma(\mathbf{p}) \longleftrightarrow e^-(\mathbf{q}') + \gamma(\mathbf{p}') \quad (2.29)$$

dove sono stati indicati gli impulsi delle particelle. Scritto esplicitamente il termine di collisione è

$$\begin{aligned} C[f(\mathbf{p})] &= \frac{1}{p} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E(p')} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \\ &\times \delta^3[\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}' - \mathbf{q}'] \delta[E(p) + E_e(q) - E(p') - E_e(q')] \\ &\times \{f_e(\mathbf{q}')f(\mathbf{p}') - f_e(\mathbf{q})f(\mathbf{p})\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dove E è l'energia del fotone ed E_e è quella dell'elettrone, mentre \mathcal{M} rappresenta l'ampiezza invariante del processo in esame. Con l'assunzione che $|\mathcal{M}|^2 = 8\pi\sigma_T m_e^2$ sia costante, con σ_T che è la sezione d'urto di Thomson. Svolgendo i calcoli si arriva a:

$$C[f(\mathbf{p})] = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\mathbf{p}) + \hat{p} \cdot \mathbf{v}_b] \quad (2.31)$$

Dove compare il *termine di monopolo* (o di ordine zero) della perturbazione:

$$\Theta_0(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(\hat{p}', \mathbf{x}, t) \quad (2.32)$$

Se $v_b = 0$ il termine di collisione guida Θ verso Θ_0 . Cioè, quando lo scattering Compton è efficiente, sopravvive solo il termine di monopolo, tutti gli altri momenti vengono spazzati via. Intuitivamente, uno scattering forte porta ad avere un cammino libero medio di un fotone molto piccolo, per cui, i fotoni arrivando in un dato punto dello spazio subiscono un ultimo scattering da elettroni vicini, che hanno circa la stessa temperatura. Perciò i fotoni, da qualsiasi direzione provengano, mostrano tutti la stessa temperatura, acquisita al momento dell'ultimo scattering. In effetti questa è proprio la caratteristica della distribuzione di monopolo: la temperatura sul cielo è uniforme.

La situazione è differente se gli elettroni presentano una $v_b \neq 0$. In questo caso si ha anche un momento di dipolo. Anche in questo caso tutti i momenti di ordine superiore scompaiono. Fondamentalmente quindi, lo scattering Compton, ha un semplice effetto: produce un monopolo e un dipolo non nulli; ciò equivale a considerare fotoni e barioni come un solo fluido: il fluido foto-barionico.

Finalmente possiamo arrivare a mettere insieme i termini che compongono i due lati dell'equazione di Boltzmann. Eguagliando l'equazione (2.28) con la (2.31) otteniamo:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\mathbf{p}) + \hat{p} \cdot \mathbf{v}_b] \quad (2.33)$$

Definiamo ora il tempo conforme attraverso l'espressione:

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} \quad (2.34)$$

La 2.33 riscritta in funzione del tempo conforme 2.34 diviene:

$$\dot{\Theta} + \hat{p}^i \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T a [\Theta_0 - \Theta(\mathbf{p}) + \hat{p} \cdot \mathbf{v}_b] \quad (2.35)$$

Conviene lavorare nello spazio di Fourier per studiare l'evoluzione per un singolo modo $k = \sqrt{k^i k^i}$:

$$\Theta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\Theta}(\mathbf{k}) \quad (2.36)$$

Definiamo ora il coseno dell'angolo tra il vettore d'onda \mathbf{k} e la direzione del fotone \hat{p} :

$$\mu = \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{p}}{k} \quad (2.37)$$

Useremo μ come variabile che descrive la direzione di propagazione del fotone. Quando $\mu = 1$ allora la direzione di moto del fotone è allineata a quella del vettore d'onda, così la direzione su cui viaggia il fotone è la stessa in cui cambia la temperatura. Se il fotone viaggiasse lungo una direzione in cui la temperatura rimane costante allora sarebbe $\mu = 0$. Assumendo che la velocità punti nella stessa direzione di \mathbf{k} , si ha che $\tilde{\mathbf{v}}_b \cdot \hat{p} = \tilde{v}_b \mu$. Riscriviamo lo spessore ottico 2.7 in funzione del tempo conforme:

$$\tau(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a \quad (2.38)$$

definito in modo che $\dot{\tau} = -n_e \sigma_T a$. A tempi tardi, la densità di elettroni liberi è piccola, così $\tau \ll 1$, mentre nell'era primordiale era prossima ad 1. Finalmente l'equazione di Boltzmann per i fotoni può essere scritta come:

$$\dot{\Theta} + ik\mu\tilde{\Theta} + \dot{\Phi} + ik\mu\tilde{\Psi} = -\dot{\tau} \left[\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta} + \mu\tilde{v}_b - \frac{1}{2}P_2(\mu)\Pi \right] \quad (2.39)$$

dove compare il tensore di polarizzazione $\Pi = \Theta_2 + \Theta_{P2} + \Theta_{P0}$ e il polinomio di Legendre di ordine 2.

L'equazione di Boltzmann per i barioni

Per i barioni (protoni ed elettroni) occorre conoscere anche il campo di velocità peculiare; si può applicare però lo stesso metodo delle equazioni di Boltzmann, e calcolare il termine di collisione per l'interazione di Coulomb $e^-(\mathbf{q}) + p(\mathbf{Q}) \rightleftharpoons e^-(\mathbf{q}') + p(\mathbf{Q}')$. Si ha anche che $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_b$. Svolgendo tutti i calcoli l'equazione di Boltzmann per gli elettroni è:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(n_e v_b^i)}{\partial x^i} + 3 \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) n_e = \langle c_{ep} \rangle \mathbf{Q} \mathbf{Q}' \mathbf{q}' \mathbf{q} + \langle c_{e\gamma} \rangle \mathbf{p} \mathbf{p}' \mathbf{q}' \mathbf{q} \quad (2.40)$$

I primi due termini rappresentano l'equazione di continuità, il terzo l'espansione dell'universo ed il quarto le perturbazioni della metrica. I due termini alla destra dell'uguale, che rappresentano i termini di collisione delle interazioni coinvolte, si annullano perché i processi considerati conservano il numero di elettroni. Passando allo spazio di Fourier, al primo ordine perturbativo, in termini di contrasto di densità δ_b , la 2.40 diventa:

$$\dot{\delta}_b + ik\tilde{v}_b + 3\dot{\Phi} = 0 \quad (2.41)$$

Per l'equazione della velocità dei barioni invece si ha:

$$\dot{v}_b + H\tilde{v}_b + ik\tilde{\Psi} = \dot{\tau}\frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b}(3i\tilde{\Theta}_1 + \tilde{v}_b) \quad (2.42)$$

Dove compare il momento di ordine uno Θ_1 definito come:

$$\Theta_1 = i \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mu \Theta(\mu) \quad (2.43)$$

Detto *momento di dipolo*. In generale, si definisce il momento di multipolo l del campo di temperatura come:

$$\Theta_l = \frac{1}{(-1)^l} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} P_l(\mu) \Theta(\mu) \quad (2.44)$$

Dove i $P_l(\mu)$ sono i *polinomi di Legendre* di ordine l . Siccome questi polinomi si infittiscono all'aumentare del loro ordine, diventando quindi più sensibili alle piccole scale, i momenti con un grande l daranno un'informazione maggiore alle piccole scale del campo di temperatura Θ .

2.4 Analisi statistica delle anisotropie della CMB

Essendo la CMB una realizzazione stocastica di un modello teorico, possiamo soltanto farne una descrizione in termini statistici, ossia attraverso delle medie d'insieme, perché nessun modello potrà mai dirci quale tra tutte le possibili realizzazioni d'universo si è verificata, ma solo quali sono le configurazioni più o meno probabili [6]. Partendo dai dati, quindi dovremo calcolare una serie di grandezze che andranno confrontate con la media e la varianza d'insieme delle stesse grandezze, calcolate però a partire dal modello teorico. Non potendo confrontare direttamente i dati con il modello, emerge dunque un limite intrinseco, dovuto alla natura stocastica del problema, alla precisione della stima dei parametri. Perciò anche un esperimento ideale ne sarà soggetto.

Facciamo ora l'ipotesi che la CMB sia un *campo gaussiano*, come predetto dalla teoria dell'inflazione. Un campo gaussiano è completamente descritto dai primi due momenti della sua distribuzione: il valore atteso e la varianza. Inoltre per una distribuzione simmetrica, tutti i momenti dispari sono nulli rispetto al valor medio, mentre quelli pari sono esprimibili usando la

varianza. In particolare assumiamo che le fluttuazioni di temperatura della CMB siano descritte da una distribuzione gaussiana multivariata con:

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) \right\rangle = 0 \quad (2.45)$$

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}') \right\rangle = C(\theta) \quad (2.46)$$

$$C(0) = \sigma^2 \quad (2.47)$$

Dove $\mathbf{n} = (\vartheta, \varphi)$ e $\mathbf{n}' = (\vartheta', \varphi')$ sono due direzioni di osservazione del cielo e θ è l'angolo tra esse, definito dalla relazione $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$. $C(\theta)$ è la funzione di correlazione a due punti del segnale, che sotto l'ipotesi di gaussianità, contiene tutte le informazioni statistiche sulla CMB.

Siccome le fluttuazioni di temperatura della CMB sono definite sulla superficie della sfera celeste, è utile espanderle in *armoniche sferiche*:

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.48)$$

Dove i coefficienti dello sviluppo sono definiti come:

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\theta \sin \theta \quad (2.49)$$

e le armoniche sferiche, che sono funzioni ortonormali, godono della proprietà:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right)^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.50)$$

per $|m| \leq l$, cioè per ogni l ci sono $2l+1$ valori di m . I $P_l(\cos \theta)$ sono i polinomi di Legendre. L'ipotesi di gaussianità è valida sia nello spazio reale che in quello armonico, quindi:

$$\langle a_{lm} \rangle = 0 \quad (2.51)$$

$$\langle a_{l'm'}^* a_{lm} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_{lm} = C_l \quad (2.52)$$

Dove l'ultima uguaglianza è valida se assumiamo che la CMB sia anche isotropa. L'insieme dei coefficienti C_l viene chiamato *spettro di potenza angolare*, in analogia con lo spettro di potenza ottenuto con la trasformata di Fourier. Se ora sostituiamo lo sviluppo in armoniche sferiche 2.48 nella 2.47, otteniamo:

$$C(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\cos \theta) \quad (2.53)$$

Che rappresenta l'analogo del teorema di Wiener-Khintchine per la trasformata di Fourier. Se, sotto l'ipotesi di gaussianità, la funzione di correlazione a due punti $C(\theta)$ contiene tutte le informazioni statistiche sulla CMB, lo stesso deve valere per il suo analogo in spazio armonico: C_l . Allora:

$$C(0) = \sigma^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} C_l \quad (2.54)$$

Lo spettro di potenza angolare ci dice quanto ogni modo nello spazio armo-

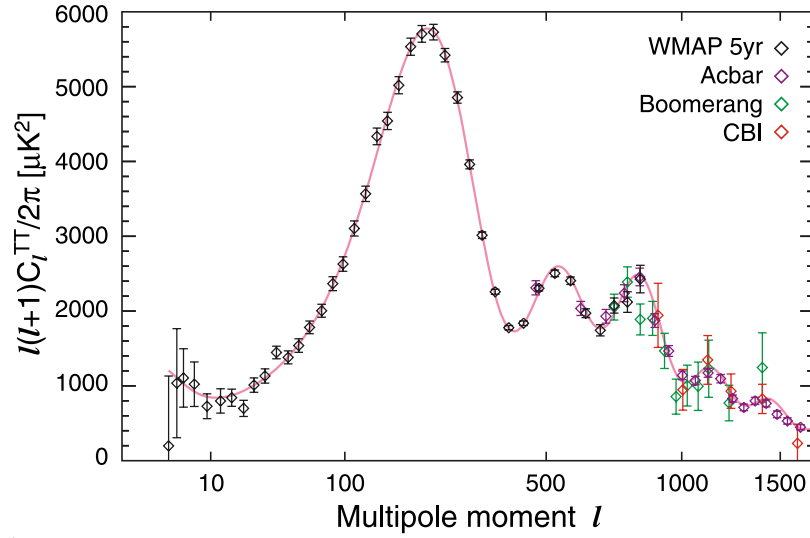


Figura 2.2: Lo spettro di potenza angolare della CMB. Sono visibili le barre di errore poste da vari esperimenti; in rosso è rappresentato il modello teorico, dove a piccoli multipoli l (corrispondenti a grandi scale angolari) è evidenziata l'incidenza della varianza cosmica [41].

nico contribuisce al segnale osservato. In particolare, per uno spazio piatto, si ha: $\theta = \pi/l$. Quindi possiamo conoscere quali sono le scale angolari caratteristiche del segnale misurato. Per esempio, la presenza di un picco a $l = 200$ ci dice che la scala angolare tipica delle anisotropie della CMB è di circa 1° . L'eventuale presenza di un picco ad un dato multipolo l rileva che la scala corrispondente ha dato un maggiore contributo allo spettro di potenza angolare. Solitamente la sommatoria sui multipoli l parte da $l = 2$, poiché il termine di monopoio $l = 0$ si annulla se definiamo in maniera corretta la temperatura media, mentre il termine di dipolo $l = 1$, che risulta principalmente dallo spostamento Doppler originato dal nostro moto nella galassia, non viene considerato. I modi con $l \geq 2$ sono quelli che rivestono maggiore interesse, perché ci danno informazioni sulle fluttuazioni presenti al tempo

dell'ultimo scattering.

Cominciamo a considerare le caratteristiche chiave dell'analisi dati della CMB considerando per primo un ipotetico esperimento ideale, e introducendo poi gradualmente le complicazioni del mondo reale. Partendo da una mappa a tutto cielo delle anisotropie della CMB possiamo calcolare i coefficienti dello sviluppo in armoniche sferiche dalla loro definizione 2.49. In presenza di uno strumento ideale, privo di rumore e con risoluzione infinita, possiamo calcolare lo spettro di potenza angolare:

$$\hat{C}_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l a_{lm}^* a_{lm} \quad (2.55)$$

Il cui valore atteso $\langle \hat{C}_l \rangle = C_l$, coincide con il valore vero della grandezza. Calcoliamone anche la varianza:

$$\text{Var}|\hat{C}_l| = \langle \hat{C}_l^2 \rangle - \langle \hat{C}_l \rangle^2 = \frac{2}{2l+1} C_l^2 \quad (2.56)$$

Che è detta *varianza cosmica*. Questa mette in evidenza un limite intrinseco alla precisione nella stima dello spettro di potenza angolare, e di conseguenza dei parametri cosmologici, dovuto alla natura stocastica del problema. Lo spettro è definito come media d'insieme del modulo quadro dei coefficienti a_{lm} , osservando noi una sola realizzazione di universo, non possiamo fare una media d'insieme, ma solo simularla assumendo l'isotropia e mediando per ogni l su tutti i valori possibili di m : che sono $2l+1$. Tanto più l è grande, quindi, tanto più sono i valori di m che potremo mediare, e tanto più la media si avvicinerà a quella d'insieme. È per questo che la varianza cosmica decresce all'aumentare di l .

Lo spettro di potenza viene calcolato a partire dalle mappe delle anisotropie, ma per un esperimento reale, nella mappa sarà presente anche il rumore strumentale. Dunque i coefficienti dello sviluppo in armoniche sferiche, saranno la somma di quelli del segnale e di quelli del rumore: $d_{lm} = a_{lm} + n_{lm}$. Di conseguenza:

$$\langle \hat{C}_l \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l (C_l + C_l^N) = C_l + C_l^N \quad (2.57)$$

Bisogna quindi rimuovere il contributo del rumore, per esempio, ricavando C_l^N dalle proprietà dello strumento, e poi sottrarlo dalla stima, oppure combinare dati di rivelatori diversi, assumendo che il rumore sia scorrelato.

Come per il rumore, un esperimento reale ha una risoluzione angolare finita, descritta da una funzione di risposta $B(\theta, \phi)$, o, nel caso di una risposta gaussiana, dalla FWHM (larghezza a mezza altezza). Quindi, osservando in

una direzione $\hat{\mathbf{n}}$, lo strumento riceve, da tutto il resto del cielo, dei contributi che vengono pesati con la risposta angolare. In termini matematici si tratta di una convoluzione:

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \int_{4\pi} d\Omega' B(\theta' - \theta, \phi' - \phi) \frac{\Delta T}{T}(\theta', \phi') \quad (2.58)$$

Passando nello spazio armonico, in analogia con quanto avviene nello spazio di Fourier, l'integrale di convoluzione si riduce ad un prodotto: $d_{lm} = a_{lm} b_{lm}$, dove i b_{lm} sono i coefficienti dello sviluppo in armoniche sferiche della risposta angolare. Dunque lo spettro angolare stimato diventa:

$$\langle \hat{C}_l \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \langle d_{lm}^* d_{lm} \rangle = B_l C_l \quad (2.59)$$

Come abbiamo visto, lavorando nello spazio armonico, molti effetti strumentali, come la presenza del rumore o la risposta angolare di un telescopio, possono essere trattati facilmente. Inoltre sotto l'ipotesi di gaussianità delle fluttuazioni di temperatura della CMB lo spettro di potenza angolare contiene tutte le informazioni statistiche della CMB.

2.5 Anisotropie primarie

Vediamo ora che tipo di anisotropie osserviamo nelle mappe di cielo della CMB.

Nell'approssimazione di forte accoppiamento tra barioni e fotoni nell'universo primordiale, i frequenti urti rendono isotropa la funzione di distribuzione dei fotoni f_γ , che infatti è completamente caratterizzata dalla distribuzione della temperatura. Oltretutto, le densità numeriche di fotoni e barioni sono accoppiate adiabaticamente: $n_\gamma \propto n_b \propto T^3$. Dunque il comportamento del fluido foto-barionico è determinato da una sola variabile: se, per esempio, conosciamo $\delta_b(\mathbf{x}, t)$, potremmo trovare \mathbf{v}_b , T e f_γ . È conveniente scegliere come variabile la fluttuazione frazionaria di temperatura $\Delta T/T(\mathbf{x}, t) = \Theta(\mathbf{x}, t)$.

Le fluttuazioni di densità sulla superficie di ultimo scattering producono anisotropie in diversi modi [6]:

- **Fluttuazioni adiabatiche**

Sapendo che $\rho_\gamma \propto a^{-4}$ e che $\rho_b \propto a^{-3}$, in condizioni adiabatiche quali quelle in cui ci troviamo, si ha:

$$\frac{\delta \rho_b}{\rho_b} = \frac{3}{4} \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} \quad (2.60)$$

Per un corpo nero, la legge di *Stephan-Boltzmann* sancisce che $\rho_\gamma \propto T^4$, quindi:

$$\frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = 4\frac{\delta T}{T} \quad (2.61)$$

che sostituita nella 2.60 porta alla relazione:

$$\frac{\Delta T}{T}|_{ad} = \frac{1}{3}\delta_b \quad (2.62)$$

che sono le fluttuazioni adiabatiche intrinseche della temperatura.

- **Effetto Sachs-Wolfe**

Una sovradensità fa perdere energia al fotone che da essa proviene perché deve risalire la buca di potenziale (subendo un redshift). Il fotone subirà quindi una diminuzione di frequenza, e per la legge del corpo nero anche di temperatura ($c=1$) [105]:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \Psi \quad (2.63)$$

Viceversa, se il fotone cade in una buca di potenziale, guadagna energia (subisce un blueshift). Ma la sovradensità causa anche una dilatazione del tempo:

$$\frac{\Delta t}{t} = \Psi \quad (2.64)$$

Siccome la ricombinazione avviene dopo l'equivalenza tra radiazione e materia, il fattore di scala ha un andamento $a \propto t^{2/3}$, e poiché la temperatura scala come l'inverso del fattore di scala, si può scrivere:

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta t}{t} = -\frac{2}{3}\Psi \quad (2.65)$$

La somma dei due termini 2.63 e 2.65 è all'origine dell'effetto *Sachs-Wolfe*, il cui contributo totale è:

$$\frac{\Delta T}{T}|_{sw} = \frac{1}{3}\Psi \quad (2.66)$$

- **Effetto Doppler**

Una sovradensità, attirando la materia circostante, genera un campo di velocità peculiari; se un fotone ha il suo ultimo scattering in zone con velocità peculiare \mathbf{v} , subisce allora un effetto Doppler:

$$\frac{\Delta T}{T}|_{Dopp} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (2.67)$$

Lungo la linea di vista tra la superficie di ultimo scattering e noi, la variazione totale di temperatura è:

$$\frac{\Delta T}{T} = \int_{\eta_s}^{\eta_0} \dot{\tau} e^{-\tau} (\Theta + \Psi + \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}) d\eta \quad (2.68)$$

Quindi, non compaiono solo le fluttuazioni intrinseche della temperatura tra le cause delle anisotropie, ma anche la variazione del potenziale gravitazionale Ψ lungo la linea di vista ed un effetto Doppler dovuto alle velocità peculiari (\mathbf{v}) nel plasma primordiale ($\hat{\mathbf{r}}$ è un vettore unitario nella direzione dell'osservazione). Questi tre contributi sono moltiplicati per la funzione di visibilità $\dot{\tau} e^{-\tau}$ (dove τ è lo spessore ottico definito dalla 2.38), che, se consideriamo che la superficie di ultimo scattering non abbia spessore, si riduce ad una delta di Dirac centrata alla ricombinazione. Perciò la 2.68 può essere riscritta come:

$$\frac{\Delta T}{T} = [\Theta + \Psi + \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}]_{\eta=\eta_s} \quad (2.69)$$

2.5.1 La dinamica del fluido foto-barionico

Le tre equazioni che abbiamo ricavato nel paragrafo 2.3.2 per il fluido foto-barionico sono:

$$\dot{\Theta} + ik\mu\tilde{\Theta} + \dot{\Phi} + ik\mu\tilde{\Psi} = -\dot{\tau} \left[\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta} + \mu\tilde{v}_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi \right] \quad (2.70)$$

$$\dot{\delta}_b + ik\tilde{v}_b + 3\dot{\Phi} = 0 \quad (2.71)$$

$$\dot{v}_b + H\tilde{v}_b = -ik\tilde{\Psi} - \frac{\dot{\tau}}{R} (3i\tilde{\Theta}_1 + \tilde{v}_b) \quad (2.72)$$

Dove $R = 3\rho_b/4\rho_\gamma$ è essenzialmente il rapporto tra l'energia dei barioni e quella dei fotoni. L'assunzione che i fotoni siano fortemente accoppiati ai barioni equivale a dire che il tempo medio tra due collisioni di fotoni è molto più piccolo rispetto ad altre scale temporali importanti, quali: il tasso di espansione dell'universo H^{-1} , il tempo impiegato dalla luce ad attraversare un modo di Fourier $(ck)^{-1}$ e il tempo impiegato invece dal suono $(c_s k)^{-1}$.

Questa approssimazione funziona molto bene all'incirca fino al tempo dell'ultimo scattering. Prima l'universo appare opaco ($\tau \gg 1$) e quindi gli unici momenti non trascurabili sono quelli di monopolo e dipolo: i fotoni si comportano come un fluido. Risolvendo [22] il sistema 2.72 con questa approssimazione, giungiamo a scrivere l'equazione che determina la dinamica del fluido foto-barionico [11]:

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 + R)\dot{\Theta} \right] + \frac{k^2}{3}\Theta = F(\eta) \quad (2.73)$$

con il termine forzante che compare a destra dell'uguale dato da:

$$F(\eta) = -\frac{k^2}{3}(1+R)\Psi - \frac{d}{d\eta} \left[(1+R)\dot{\Phi} \right] \quad (2.74)$$

Dove la derivazione è intesa rispetto al tempo conforme η . Questa equazione è nello spazio di Fourier, dove $\Theta = \Theta_{\mathbf{k}}$ rappresenta un singolo modo con numero d'onda \mathbf{k} . Osserviamo che, per un redshift di ricombinazione $z \approx 1000$, e delle densità di barioni con valore preso vicino a quello dato dalla nucleosintesi, il rapporto R è costante, e vale circa:

$$R = \left(\frac{450}{1+z} \right) \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.015} \right) \simeq \frac{1}{2} \quad (2.75)$$

dove h è il parametro di Hubble in unità 100 km/s Mpc. Con questa approssimazione, non ci sono stress anisotropi, così i potenziali gravitazionali sono legati dalla relazione:

$$\Phi = -\Psi \quad (2.76)$$

Inoltre, come abbiamo già accennato, durante l'era di dominazione della materia Ψ è anche indipendente dal tempo. Per cui rimane solo il primo termine della 2.74, e l'equazione 2.73 si riscrive come:

$$(1+R)\ddot{\Theta} + \frac{k^2}{3}\Theta = -\frac{k^2}{3}(1+R)\Psi \quad (2.77)$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico, con soluzione:

$$\Theta(\eta) = -(1+R)\Psi + K_1 \cos(kc_s\eta) + K_2 \sin(kc_s\eta) \quad (2.78)$$

K_1 e K_2 sono costanti da fissare date delle condizioni iniziali e $c_s = [3(1+R)]^{-1/2}$ è la velocità del suono. In questa approssimazione, ogni modo di Fourier rappresenta un'onda acustica piana che si propaga a velocità c_s . Fisicamente: il fluido foto-barionico tenderebbe a cadere nelle buche di potenziale della CDM, ma gli viene impedito dalla pressione della radiazione. Il bilanciamento tra pressione e gravità è all'origine delle oscillazioni acustiche. Semplifichiamo ancora imponendo $R = 0$; la 2.78 diventa:

$$\Theta(\eta) = -\Psi + K_1 \cos(kc_s\eta) + K_2 \sin(kc_s\eta) \quad (2.79)$$

Considerando delle condizioni iniziali adiabatiche, cioè che le fluttuazioni di materia e radiazione siano identiche in ogni punto, le condizioni iniziali del nostro problema si riducono a:

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = 0 \\ \Theta(0) = -\frac{2}{3}\Psi \end{cases}$$

e per la 2.79 si ha:

$$\Theta(\eta) = -\Psi + \frac{1}{3}\Psi \cos(kc_s\eta) \quad (2.80)$$

Con la quale vediamo che i due termini $(\Theta + \Psi)$ della 2.69, ignorando per il momento il termine Doppler, mostrano un'oscillazione in coseno. Così la fluttuazione quadratica media della variazione della temperatura è grande quando $kc_s\eta_{ls}$ è un multiplo intero di π . Dunque $\Delta T/T$ avrà una serie di picchi nello spazio di Fourier, che comportano la presenza di una serie di picchi anche nello spettro di potenza angolare delle anisotropie CMB.

Questi picchi vengono chiamati picchi Doppler (in figura 2.2) anche se nulla hanno a che vedere con l'effetto Doppler.

Il primo picco è causato dai modi che hanno avuto il tempo di oscillare per la metà di un periodo prima dell'ultimo scattering; il secondo picco, invece, è generato dai modi che hanno oscillato per un intero periodo, e così via. Per cui la scala fisica del primo picco è $\lambda \sim k^{-1} = c_s\eta_{ls}/\pi \sim 30$ Mpc. La distanza dalla superficie di ultimo scattering è $D = \eta_0 - \eta_{ls} \sim 6000$ Mpc, che corrisponde ad una scala angolare per il primo picco di $\lambda/D \sim 0^\circ.25$. Notiamo che questo è proprio l'effetto Sachs-Wolfe che avevamo qualitativamente introdotto nella 2.66:

$$\frac{\Delta T}{T}|_{sw} = (\Theta + \Psi) = \frac{1}{3}\Psi \cos(kc_s\eta) \quad (2.81)$$

Dall'equazione di Poisson 2.18 si ricava che $\Psi \propto k^{-2}$, quindi l'effetto Sachs-Wolfe è dominante a piccoli k , che corrispondono a grande scale spaziali e piccoli multipoli. Si può anche dimostrare che le anisotropie prodotte da questo effetto hanno una potenza costante a piccoli multipoli.

Rintroduciamo adesso il contributo Doppler. Dall'equazione di continuità 2.16 e la relazione 2.62, troviamo che:

$$\mathbf{v} = \frac{3i}{k}\dot{\Theta}\hat{\mathbf{k}} \quad (2.82)$$

che è la velocità peculiare del fluido foto-barionico soggetto ad un potenziale gravitazionale, dove $\hat{\mathbf{k}}$ è un versore nella direzione di \mathbf{v} . Differenziando la 2.80, e usando la velocità del suono $c_s = 1/\sqrt{3}$ (se $R = 0$), troviamo che:

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\Psi \sin(kc_s\eta) \quad (2.83)$$

Essendo il valore della fluttuazione quadratica media $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}})$ pari a $1/\sqrt{3}$, allora il contributo Doppler all'equazione 2.69 sarà:

$$\frac{\Delta T}{T}|_{Dopp} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{i}{3}\Psi \sin(kc_s\eta) \quad (2.84)$$

Che ha la stessa ampiezza del contributo Sachs-Wolfe 2.81, ma è fuori fase di 90° sia nel tempo (oscilla come un seno) che nello spazio (c'è *i* davanti). L'aggiunta di questo termine a quello già ricavato prima porta all'ovvia conseguenza della completa cancellazione dei picchi. Infatti, sommando in quadratura i due contributi 2.81 e 2.84, otteniamo:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 \propto \sin^2(kc_s\eta) + \cos^2(kc_s\eta) = 1 \quad (2.85)$$

Da cui si vede bene che la dipendenza da k , che portava alla comparsa dei picchi, non c'è più.

Il problema è insito nella scelta di porre $R = 0$, far ciò equivale a non

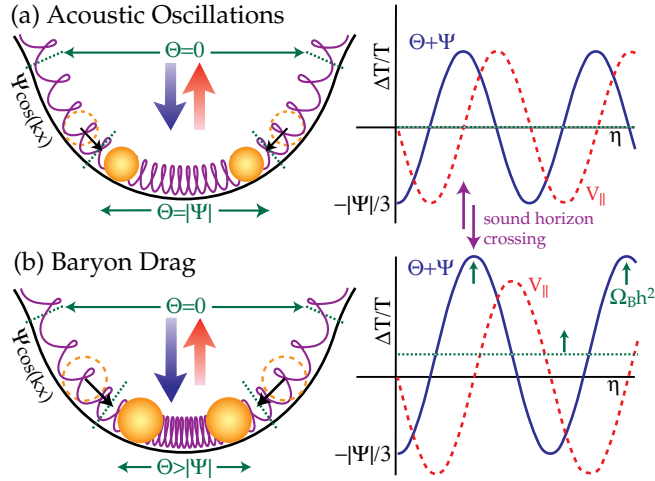


Figura 2.3: Oscillazioni acustiche del fluido fotobarionico. Mostriamo il comportamento del fluido all'interno di una buca di potenziale; le molle rappresentano la pressione, mentre le palline la massa del sistema. La parte superiore della figura mostra il caso in cui il contributo dei barioni alla massa effettiva del fluido è trascurabile, mentre la parte inferiore il caso in cui non lo è. I barioni incrementano la massa del fluido causando un offset delle oscillazioni. In più la velocità del suono diminuisce. Ciò comporta due effetti, evidenziati nella colonna di destra: i barioni fanno sì che le oscillazioni procedano più lentamente e riducono, inoltre, il contributo Doppler rispetto agli altri [11].

considerare gli effetti dinamici dei barioni. Rimuovendo questa assunzione, ma lasciando quella per cui R è indipendente dal tempo, la soluzione per

$\Theta(\eta)$ cambia in due modi. La velocità del suono diminuisce di un fattore $1/\sqrt{1+R}$, e il termine forzante $F(\eta)$ aumenta di un fattore $(1+R)$.

Perciò la soluzione adiabatica dell'equazione 2.73 sarà:

$$\Theta(\eta) = \frac{1}{3}(1+3R)\Psi \cos(kc_s\eta) - (1+R)\Psi \quad (2.86)$$

In pratica abbiamo incrementato l'ampiezza delle oscillazioni di un fattore $(1+3R)$. Ora c'è anche un termine di offset: quando avevamo posto $R=0$, il termine $(\Theta+\Psi)$ oscillava simmetricamente intorno allo zero; ora, invece, oscilla intorno a $-R\Psi$. Oltretutto, un $R \neq 0$ riduce l'ampiezza del contributo Doppler alle anisotropie rispetto a quello Sachs-Wolfe (l'ampiezza del coseno diventa maggiore di quella del seno), visto che la velocità $v \propto c_s\Theta$ e c_s diminuisce.

La ragione fondamentale per cui ciò avviene, è che i barioni contribuiscono alla massa del fluido foto-barionico, ma non alla pressione. Guardando alla 2.73, si vede chiaramente che il primo termine, che rappresenta la massa, dipende da R , al contrario del secondo, che rappresenta la pressione.

In sostanza, l'effetto dei barioni, è quello di rallentare le oscillazioni, ed incrementare la caduta del fluido nelle buche di potenziale. Questi effetti sono mostrati nella figura 2.3. Da questa analisi, segue che l'altezza dei picchi dello spettro di potenza delle anisotropie della CMB dipenderà dalla densità dei barioni: più questa è grande, più è grande R e maggiore è l'ampiezza delle oscillazioni. Ci aspettiamo altresì che, a causa dell'offset nelle oscillazioni, i picchi dispari abbiano un'ampiezza maggiore rispetto a quelli pari. Entrambi questi effetti sono visivamente descritti in figura 2.4.

Se R variasse col tempo (con tempo scala dell'ordine del tempo di Hubble, assai più grande del periodo di un'onda acustica), la fase delle oscillazioni cambierebbe da $kc_s\eta$ a $k \int c_s\eta$, e l'ampiezza delle oscillazioni aumenterebbe proporzionalmente alla $\sqrt{c_s}$. Finora abbiamo considerato il termine forzante $F(\eta)$ indipendente dal tempo, vediamo ora cosa succede se abbandoniamo questa approssimazione. Una forzante costante nell'equazione di un oscillatore crea solamente un offset delle oscillazioni; invece, una forzante che varia col tempo, domina completamente l'andamento delle oscillazioni. Se, in particolare, il termine forzante varia significativamente in un tempo comparabile al periodo delle oscillazioni si verifica una risonanza.

Come accennato precedentemente, il potenziale gravitazionale Ψ , e quindi anche F , è costante nell'epoca di dominazione della materia, ma decade quando domina la radiazione.

L'effetto del termine forzante è particolarmente evidente se guardiamo gli

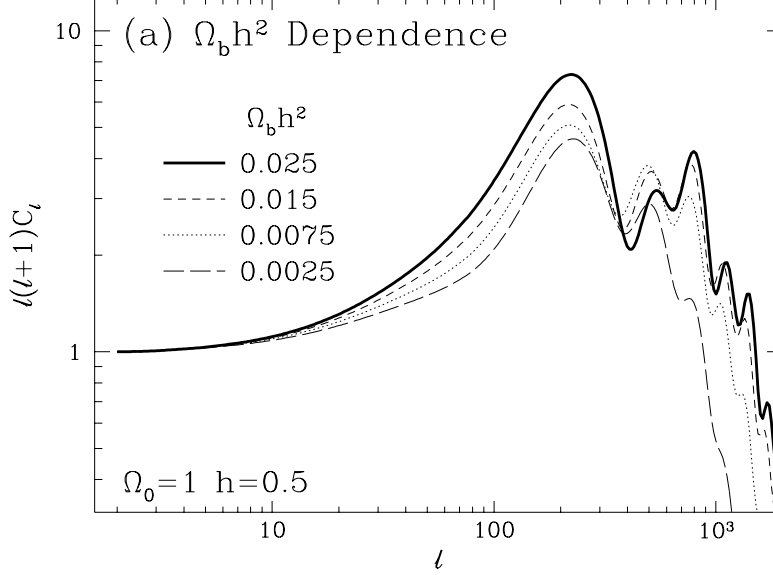


Figura 2.4: Spettro di potenza angolare delle anisotropie della CMB per diversi valori del parametro di densità dei barioni $\Omega_b h^2$ [11].

spettri di potenza per differenti valori di h . I modi che ricevono l'incremento maggiore sono quelli che entrano nell'orizzonte prima dell'equivalenza, per un numero d'onda $k \geq k_{eq} = (14 \text{ Mpc})^{-1} \Omega_0 h^2$. Per piccoli h , l'equivalenza è spostata in avanti, dunque l'aumento delle oscillazioni è maggiore (vedi figure 2.6).

Fin qui ci siamo occupati di modelli con condizioni iniziali adiabatiche. Se invece consideriamo dei modelli detti di *isocurvatura*, l'effetto del termine forzante diventa maggiormente evidente. Nei modelli di isocurvatura, la densità totale delle perturbazioni si annulla a tempi primordiali: $\delta\rho_{tot} = \delta\rho_b + \delta\rho_\gamma + \delta\rho_c + \dots = 0$. In questi modelli si ha $\Theta(0) = 0$. Col passare del tempo, $\delta\rho_\gamma$ subisce un redshift, lasciando le perturbazioni di densità e dei potenziali Φ e Ψ non nulli. Le oscillazioni sono quindi guidate da Θ . Contrariamente al caso adiabatico, queste oscillazioni di isocurvatura sono proporzionali al $\sin(kc_s\eta)$ piuttosto che al $\cos(kc_s\eta)$. I picchi, in un modello di isocurvatura, hanno dunque una fase differente rispetto a quelli adiabatici. Grazie alle posizioni dei picchi nello spettro di potenza della CMB, possiamo distinguere tra modelli di isocurvatura e modelli adiabatici. La figura 2.5 illustra l'origine dei picchi nei modelli di isocurvatura.

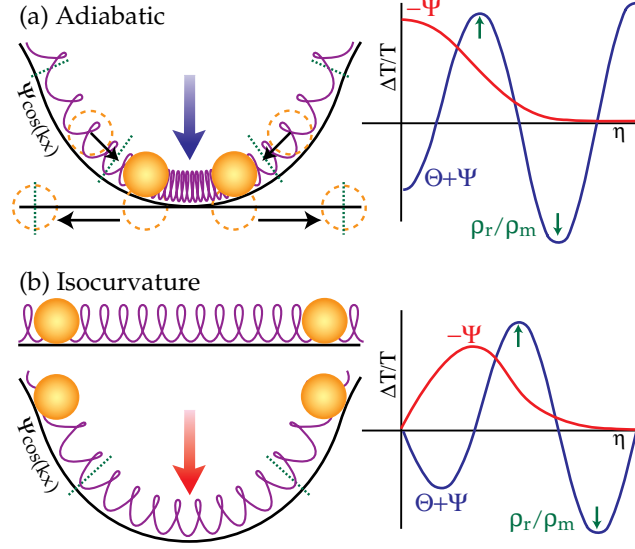


Figura 2.5: Effetto del termine forzante sulle oscillazioni acustiche. Nel caso adiabatico (pannello superiore), il decadimento graduale del potenziale causa un piccolo incremento dell'ampiezza delle oscillazioni. Per condizioni iniziali di isocurvatura, la perturbazione iniziale $\Theta + \Psi$ è zero, e la crescita, ed il successivo decadimento, del potenziale Ψ è interamente responsabile dell'andamento delle oscillazioni [11].

L'approssimazione di accoppiamento forte tra barioni e fotoni è valida fino al momento dell'ultimo scattering, dopo i fotoni vengono tutti lasciati liberi di propagarsi all'istante. Tuttavia questo non è lo scenario reale: i fotoni, diffusi da regioni più dense a regioni meno dense, causano un significativo smorzamento delle fluttuazioni. Oltretutto, la superficie di ultimo scattering, assomiglia più ad uno strato con un dato spessore. Tutte le oscillazioni su scale minori di questo spessore non generano anisotropie della CMB. Questo effetto di smorzamento viene definito *Silk damping*.

Per esempio, consideriamo un fotone con cammino casuale nel fluido foto-barionico. Il suo cammino libero medio sarà λ ; ad un tempo η il fotone avrà interagito circa $N \sim \eta/\lambda$ volte e sarà stato diffuso su una distanza $\lambda_D \sim \sqrt{N}\lambda \sim \sqrt{\eta\lambda}$. Se un qualsiasi modo di Fourier avesse una lunghezza d'onda minore di λ_D , allora i fotoni saranno diffusi da regioni sovradense a regioni sottodense e il modo considerato verrà cancellato. Questo effetto di smorzamento ha luogo per tutti i modi con numero d'onda $k^{-1} \geq \lambda_D$, per tempi molto vicini a quello dell'ultimo scattering, dopo il quale il cammino libero medio λ dei fotoni diventa grande. I picchi dello spettro ne risentiran-

no quindi solo a grandi multipoli.

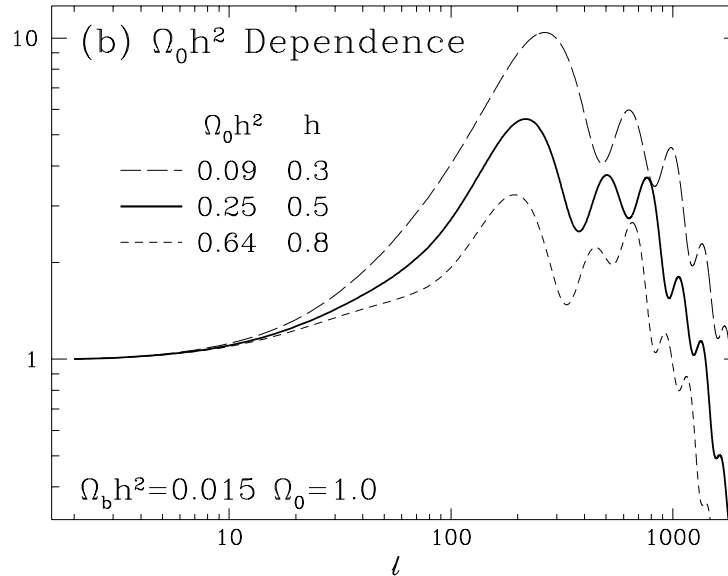


Figura 2.6: Spettro di potenza angolare della CMB per modelli con differenti valori di h . Tutti i modelli qui considerati hanno $\Omega_{tot} = 1$. Per piccoli valori di $\Omega_0 h^2$, l'epoca di dominazione della materia ritarda. Dunque l'effetto del decadimento del potenziale gravitazionale risulta più importante: aumenta l'altezza dei picchi [11].

2.6 Anisotropie secondarie

Dopo l'ultimo scattering, i fotoni sono liberi di propagarsi fino a noi senza subire più collisioni. Le cause delle anisotropie secondarie sono quindi di natura gravitazionale, tra queste l'effetto più importante è l'effetto Sachs-Wolfe integrato che descriveremo nel dettaglio nel prossimo capitolo. Anche le lenti gravitazionali deboli possono avere un effetto sullo spettro delle anisotropie, distorcendolo di poco; inoltre se il mezzo intergalattico subisce una reionizzazione a basso redshift, nuove fluttuazioni, di natura differente dalle prime, verranno generate.

- Effetto Rees-Sciama

A tempi tardi, cominciano a formarsi le prime strutture non lineari, questo causa una crescita del potenziale gravitazionale nel tempo. Questo effetto simile all'ISW è chiamato effetto Rees-Sciama [92]. Tipicamente è il più debole tra gli effetti che causano le anisotropie secondarie.

Se le onde gravitazionali esistessero, anch'esse produrrebbero un piccolo effetto ISW [5]. Lo stesso dicasi per eventuali difetti topologici.

- Reionizzazione

Nei modelli CDM di formazione delle strutture, la *reionizzazione* [61], cioè una nuova ionizzazione dell'universo, ha luogo generalmente ad un redshift abbastanza basso, con la formazione delle prime strutture cosmiche. Se è così la reionizzazione non altera sostanzialmente le anisotropie CMB [46, 55]. Se, invece, la reionizzazione avviene ad un redshift $z \geq 100$, allora una frazione significativa dei fotoni CMB potrebbe aver subito nuove interazioni con la materia reionizzata dopo l'epoca dell'ultimo scattering, col risultato che le fluttuazioni primarie verranno cancellate. Se un fascio di fotoni di temperatura $T(1 + \Theta)$ entra in una regione di spessore ottico τ , la frazione che prosegue verso di noi sarà $e^{-\tau}$, oltre alla quale si avrà un contributo $(1 - e^{-\tau})$ riemesso dalla regione ionizzata. Quindi la temperatura che oggi osserviamo è:

$$T(1 + \Theta)e^{-\tau} + T(1 - e^{-\tau}) = T(1 + \Theta e^{-\tau})$$

che implica che l'anisotropia osservata sarà quella originaria moltiplicata per $e^{-\tau}$, e il suo spettro di potenza sarà attenuato di $e^{-2\tau}$, almeno su scale che all'epoca della reionizzazione erano all'interno dell'orizzonte, cioè per $l > \tau_0/\tau_{reion}$, mentre scale più grandi restano inalterate. La ragione è semplice, se si verifica la reionizzazione, allora un fotone che viene verso di noi da una direzione particolare, potrebbe non essere stato originato da quella stessa direzione. Ogni direzione del cielo conterrebbe fotoni che sono stati emessi da un gran numero di direzioni diverse all'epoca dell'ultimo scattering, infatti in ogni punto della superficie di reionizzazione viene mediata la temperatura della radiazione proveniente dal cono di luce passato in quel punto, d'ampiezza $\vartheta \simeq \sqrt{\Omega_{0tot}/z}$. Da notare è che questo processo avviene su scale angolari dell'ordine di quella dell'orizzonte al momento della reionizzazione, scale che sono tanto più grandi quanto il redshift è piccolo. Risultati sperimentali suggeriscono che una reionizzazione ci sia stata ad un'epoca corrispondente ad un redshift $z \approx 10.9 \pm 1.4$ [34] non molto grande, dunque non altera significativamente lo spettro delle anisotropie della

radiazione di fondo cosmico.

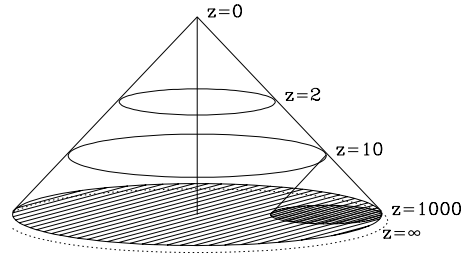


Figura 2.7: Il cono di luce che illustra il meccanismo della reionizzazione. L'asse verticale rappresenta il tempo conforme, gli assi orizzontali due delle tre direzioni spaziali. In assenza di reionizzazione, ogni linea di vista corrisponde ad un punto particolare sulla superficie di ultimo scattering a $z \simeq 1100$. Invece, in un universo reionizzato, se un fotone viene ridiffuso ad un redshift $z \simeq 10$, quando osserviamo un fotone in una direzione, questo potrebbe provenire da un punto qualsiasi della superficie circolare scura evidenziata [11].

- Lenti gravitazionali

L'effetto della gravità può cambiare la direzione trasversale a quella di moto dei fotoni, ma non la loro energia. Per cui l'effetto delle lenti gravitazionali deboli [84] è quello di distorcere la superficie di ultimo scattering. Questa distorsione risulta in una leggera sbavatura dello spettro: un po' della potenza dei picchi viene spostata nelle valli. Tuttavia questo effetto è molto debole: non altera significativamente lo spettro di potenza delle anisotropie della CMB.

- Effetto Sunyaev-Zel'Dovich (SZ)

Questo effetto, legato alla presenza di ammassi di galassie lungo la linea di vista dei fotoni CMB, può essere di due tipi, cinetico o termico. Quando i fotoni CMB incontrano un ammasso di galassie, la densità di elettroni liberi causa un effetto Compton inverso, e la temperatura altissima del gas ionizzato presente negli ammassi (dell'ordine dei milioni di gradi Kelvin), modificherà in parte lo spettro di corpo nero della radiazione CMB, incrementando l'intensità della regione di Wien e diminuendo quella della regione di Rayleigh-Jeans. Questo effetto, dipendente dalla frequenza oltre che dalla scala, è detto effetto

Sunyaev-Zel'Dovich termico (TSZ) [99][100]. L'ampiezza del contributo TSZ è una misura dell'integrale di pressione elettronica p_e lungo la linea di vista γ [85]:

$$\Theta_{SZ}(\nu) = -A(x) \int_{\gamma} \delta p_e[(\eta_0 - \eta)\hat{\mathbf{n}}, \eta] d\eta \quad (2.87)$$

Dove $x = h\nu/(k_B T_0)$ e $A(x) = \sigma_T[4 - \coth(x/2)]/m_e$. Il contributo è dunque direttamente collegato alle proprietà del gas all'interno dell'ammasso: alla temperatura T_e e allo spessore ottico τ . Quello che si riscontra sperimentalmente è un aumento di temperatura ad alte frequenze ($\sim 850\mu\text{m}$) ed un abbassamento alle basse ($\sim 2\text{mm}$), grazie a questa sua caratteristica può essere facilmente sottratto dalle anisotropie totali della CMB. L'effetto SZ cinetico (KSZ), invece, si ha quando un ammasso presenta una velocità peculiare rispetto al fondo di radiazione, i fotoni CMB interagiscono con gli elettroni liberi del plasma dell'ammasso, risultando in un blueshift o redshift a seconda se l'ammasso si muove verso o lontano da noi, è come un effetto Doppler dovuto al moto dell'ammasso. Mantiene le caratteristiche spettrali delle anisotropie primarie, ed è quindi più difficilmente isolabile dal resto [83].

2.7 Dipendenza dello spettro dai parametri cosmologici

Abbiamo visto finora come funzionano i meccanismi che sono all'origine dello spettro di potenza della CMB. In un tipico spettro CDM, la presenza di picchi nello spettro, è dovuta alle oscillazioni acustiche del fluido foto-barionico. I picchi corrispondono ai modi che subiscono la massima compressione o rarefazione al tempo dell'ultimo scattering. Modi che sono fuori fase con questi ultimi producono anisotropie via effetto Doppler riempiendo parzialmente le valli tra i picchi. L'effetto di smorzamento alle piccole scale è evidente. Possiamo ora brevemente vedere come influiscono sulla forma dello spettro alcuni parametri cosmologici.

In modelli con $\Omega_K = 0$, la posizione dei picchi acustici è spostata per via di deviazioni delle geodetiche, inoltre si avrebbe un effetto ISW non nullo che influenzerebbe le grandi scale. La presenza di una costante cosmologica fa slittare la posizione dei picchi perché aumenta la distanza dalla superficie di ultimo scattering, ed ancora si avrebbe un effetto ISW. Se invece fissiamo

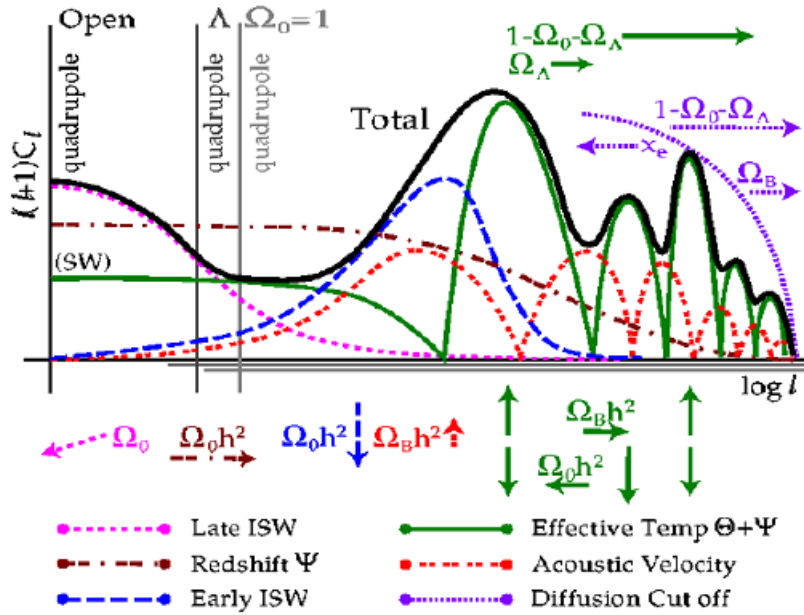


Figura 2.8: Contributi allo spettro totale della CMB [11].

Ω_{tot} , e diminuendo il parametro di Hubble, si riduce anche la densità di materia. Così le oscillazioni di natura gravitazionale aumentano, causando un incremento in altezza dei picchi. Aumentando la densità dei barioni $\Omega_b h^2$, aumenta anche l'ampiezza dei picchi. In particolare vengono incrementati i picchi dispari. Da tutto questo si capisce che la CMB è un ottimo strumento per la misura dei parametri cosmologici, in particolare la curvatura spaziale è forse la più semplice da misurare grazie alla posizione del primo picco dello spettro CMB.

2.8 Cenni alla polarizzazione della CMB

Esistono delle informazioni supplementari sulla CMB oltre a quelle contenute nello spettro di potenza della temperatura: sono presenti nella sua polarizzazione. La polarizzazione della CMB ha origine nell'interazione Thomson tra i fotoni della CMB e gli elettroni liberi all'epoca dell'ultimo scattering. Oltretutto, solo una radiazione anisotropa porta ad una polarizzazione non nulla, infatti, per motivi di simmetria, se la radiazione incidente su un elettrone fosse isotropa, non ci sarebbe una direzione privilegiata per la polarizzazione della luce. Il campo di radiazione della CMB, proveniente dalla direzione \hat{n} è

caratterizzato da un tensore 2×2 : I_{ij} , la cui traccia $I = I_{11} + I_{22}$, che rappresenta proprio l'intensità della radiazione, è invariante per rotazioni intorno all'asse definito da $\hat{\mathbf{n}}$. La trattazione della polarizzazione avviene attraverso la definizione dei *parametri di Stokes* Q, U, T e V. I parametri Q ed U sono definiti come: $Q = (I_{11} - I_{22})/4$, $U = I_{12}/2$, mentre l'anisotropia della temperatura è $T = (I_{11} + I_{22})/4$. In teoria il quarto parametro V, che descrive la polarizzazione circolare, dovrebbe comunque essere esplicitato, ma lo possiamo ignorare poiché non si genera attraverso lo scattering Thomson. La temperatura è invariante sotto una rotazione destrorsa nel piano perpendicolare alla direzione $\hat{\mathbf{n}}$, mentre Q e U si trasformano sotto rotazione di un angolo ψ come [106]:

$$Q' = Q \cos(2\psi) + U \sin(2\psi) \quad (2.88)$$

$$U' = -Q \sin(2\psi) + U \cos(2\psi) \quad (2.89)$$

con i versori $\hat{\mathbf{e}}'_1 = \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2$ ed $\hat{\mathbf{e}}'_2 = -\sin \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_2$, che insieme ad $\hat{\mathbf{n}}$ formano una terna ortogonale sinistrorsa. Il vettore di polarizzazione è caratterizzato da un'ampiezza $P = \sqrt{Q^2 + U^2}$ e da un angolo $\alpha = (1/2)\arctan(Q/U)$ formato col versore $\hat{\mathbf{e}}_1$. Ora possiamo costruire due quantità dai parametri di Stokes Q ed U con valore dello spin ben definito e pari a 2:

$$(Q \pm iU)'(\hat{\mathbf{n}}) = e^{\mp 2i\psi} (Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}}) \quad (2.90)$$

Espandendo queste quantità in armoniche sferiche di spin $\pm 2Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$ si ottiene [81]:

$$T(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} a_{T,lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) \quad (2.91)$$

$$(Q + iU)(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} a_{2,lm} {}_2Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) \quad (2.92)$$

$$(Q - iU)(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} a_{-2,lm} {}_{-2}Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) \quad (2.93)$$

Dove i coefficienti che compaiono hanno lo stesso sviluppo della 2.49. Invece di $a_{\pm 2,lm}$, è conveniente introdurre le loro combinazioni lineari:

$$a_{E,lm} = -(a_{2,lm} + a_{-2,lm})/2 \quad (2.94)$$

$$a_{B,lm} = i(a_{2,lm} - a_{-2,lm})/2 \quad (2.95)$$

Che portano a definire due modi reali di polarizzazione definiti come:

$$E(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} a_{E,lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) \quad (2.96)$$

$$B(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} a_{B,lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) \quad (2.97)$$

Queste due combinazioni si comportano in modo diverso sotto l'effetto di

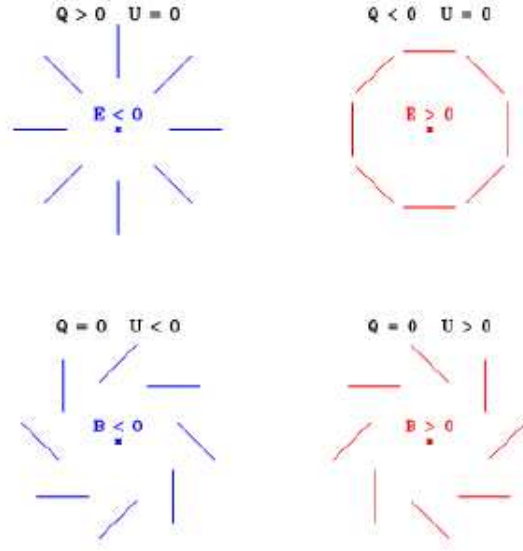


Figura 2.9: Esempio di un campo di polarizzazione di modi E e B della CMB.

una trasformazione di parità: mentre E rimane invariato, B cambia segno. Per caratterizzare le perturbazioni della CMB, sono necessari quattro spettri di potenza; quelli per T, E, B e la cross-correlazione fra T ed E. Le altre correlazioni tra B ed E, o fra B e T si annullano perché B ha parità opposta rispetto a T ed E. Quindi gli spettri di potenza, invarianti sotto rotazione, sono definiti dalle relazioni:

$$C_l^{TT} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{T,lm}^* a_{T,lm} \rangle \quad (2.98)$$

$$C_l^{EE} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{E,lm}^* a_{E,lm} \rangle \quad (2.99)$$

$$C_l^{BB} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{B,lm}^* a_{B,lm} \rangle \quad (2.100)$$

$$C_l^{TE} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{T,lm}^* a_{E,lm} \rangle \quad (2.101)$$

Dove C_l^{TT} è proprio lo spettro di potenza C_l delle anisotropie della CMB che abbiamo descritto finora. Tutti questi spettri entrano nella matrice simmetrica 3×3 usata per le funzioni di correlazione a due punti:

$$\begin{pmatrix} C_l^{TT} & C_l^{TE} & C_l^{TB} \\ C_l^{ET} & C_l^{EE} & C_l^{EB} \\ C_l^{BT} & C_l^{BE} & C_l^{BB} \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

Inoltre i due campi di polarizzazione E e B hanno proprietà diverse: B ha divergenza nulla, mentre E ha il rotore nullo, in analogia con il campo elettromagnetico dal quale prendono il nome.

Vediamo ora con l'ausilio della figura 2.9 come sono e come si comportano i modi E e B della polarizzazione della CMB. Se facciamo derivare la polarizzazione dai soli modi E, vediamo che la figura è composta da sole linee radiali o tangenziali, essendo il rotore di E nullo. Si nota anche che le figure sono invarianti per riflessione. Se invece consideriamo solo modi B, le figure appaiono quelle di un campo solenoidale, e possono trasformarsi l'una nell'altra. Non sono però invarianti per riflessione. Si vede che la figura dei modi B si ottiene semplicemente ruotando di 45° quella dei modi E. Infine si può dimostrare che i modi B sono caratteristici dei modi tensoriali, mentre non può esserci uno spettro B per i modi scalari. L'eventuale misura dei modi B costituirebbe un'evidenza sperimentale dell'esistenza delle onde gravitazionali.

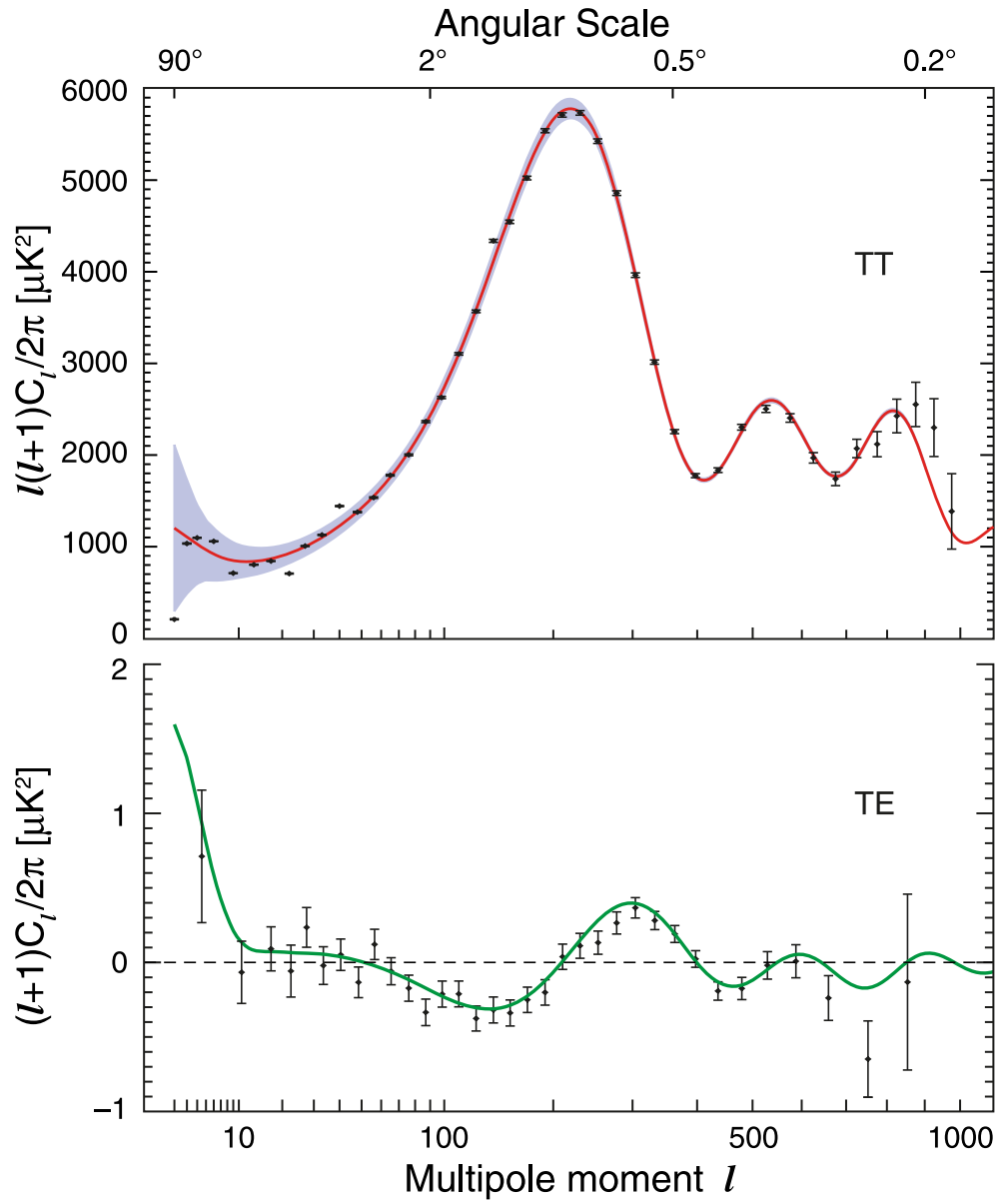


Figura 2.10: Lo spettro di potenza angolare della CMB per un modello Λ CDM, insieme allo spettro dei modi TE della correlazione tra temperatura e polarizzazione [34].

Capitolo 3

L'effetto Sachs-Wolfe integrato

In questo capitolo ci occuperemo dell'effetto *Sachs-Wolfe integrato* (ISW) [9, 50, 52, 91], che rappresenta la più significativa delle anisotropie secondarie della CMB. Dopo l'ultimo scattering, i fotoni non interagiscono per lungo tempo con la materia, esistono però due diverse possibilità perché lo spettro di potenza delle fluttuazioni di temperatura della CMB cambi: o per effetto di una eventuale reionizzazione o per effetto della gravità, che può far variare il potenziale gravitazionale.

Sachs e Wolfe nel 1967 [95] mostrarono che fluttuazioni alla curvatura dello spazio-tempo producono anisotropie della CMB in due modi. L'effetto Sachs-Wolfe "ordinario" consiste semplicemente in un redshift o blueshift gravitazionale dovuto alle differenze del potenziale gravitazionale tra i punti di emissione e ricezione di un fotone. In più, se il potenziale varia nel tempo, si verifica un effetto *Sachs-Wolfe integrato* sull'intero cammino del fotone dalla superficie di ultimo scattering ad oggi. Questa variazione del potenziale avviene quando diventa importante il contributo di energia oscura, quindi in tempi recenti. Dunque, per poter rivelare questo effetto si può calcolare una cross-correlazione della CMB con i cataloghi di galassie, visto che l'effetto ha luogo quando le strutture galattiche sono presenti e che queste sono completamente scorrelate con le altre anisotropie.

3.1 L'effetto Sachs-Wolfe integrato

Immaginiamo un fotone che attraversa una buca di potenziale: se il potenziale non varia col tempo, il fotone non subisce cambiamenti in energia. Tuttavia, se il potenziale decade mentre il fotone lo attraversa, allora il redshift che subisce nell'uscire dalla buca di potenziale sarà minore del blueshift subito nell'entrarvi. Il fotone, in pratica, guadagna energia. Il contributo dell'effetto

ISW allo spettro delle anisotropie è dato da:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{ISW}(\hat{\mathbf{n}}) = \int_{\eta_s}^{\eta_0} \left[\dot{\Phi}((\eta_0 - \eta)\hat{\mathbf{n}}, \eta) - \dot{\Psi}((\eta_0 - \eta)\hat{\mathbf{n}}, \eta) \right] e^{-\tau(\eta)} d\eta \quad (3.1)$$

Dove $\hat{\mathbf{n}}$ è una direzione di osservazione nel cielo, η è il tempo conforme, η_0 è il tempo oggi, η_s è il tempo all'ultimo scattering e $\tau(\eta)$ è l'opacità, che è inclusa per tener conto di una possibile reionizzazione dell'universo.

Abbiamo già visto che il potenziale gravitazionale è indipendente dal tempo, in particolare se sono soddisfatte alcune condizioni:

- L'universo è dominato dalla materia ($\rho_m \gg \rho_r$);
- L'universo è piatto ($\Omega_K = 0$);
- È valida la teoria lineare delle perturbazioni ($\delta \ll 1$).

Se tutte queste condizioni sono soddisfatte, non ci può essere effetto ISW. Tuttavia, in qualsiasi modello cosmologico realistico, alcune o tutte queste condizioni sono violate in qualche punto della storia dell'universo.

Nel propagarsi dalla superficie di ultimo scattering, ogni fotone subisce l'effetto del campo gravitazionale attraverso l'equazione di Sachs e Wolfe che, ricavata dalla precedente (considerando la 2.76) è:

$$\Theta_{ISW}(\hat{\mathbf{n}}) = 2 \int_{\eta_s}^{\eta_0} \dot{\Phi}((\eta_0 - \eta)\hat{\mathbf{n}}, \eta) e^{-\tau(\eta)} d\eta \quad (3.2)$$

Se siamo in regime perturbativo lineare e se l'universo è piatto, durante l'epoca dominata dalla materia, dall'equazione di Poisson 1.12 si ricava l'espressione seguente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 4\pi G a^2 \delta_m \rho_m & (3.3) \\ &= 4\pi G a^2 \delta_m \rho_{cr} \Omega_m a^{-3} \\ &= \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_m \frac{\delta_m}{a} \end{aligned}$$

Dove δ_m è la fluttuazione della densità di materia e Ω_m è il parametro di densità della materia. Passando nello spazio di Fourier si ottiene:

$$\Phi_k = \frac{3}{2k^2} H_0^2 \Omega_m \frac{\delta}{a} \quad (3.4)$$

Siccome poi nel periodo di dominazione della materia $\delta \propto a$ allora $\Phi = \text{cost}$ nel tempo. La conseguenza è che non c'è effetto ISW. Questo effetto però si manifesta almeno in due epoche durante l'evoluzione dell'universo.

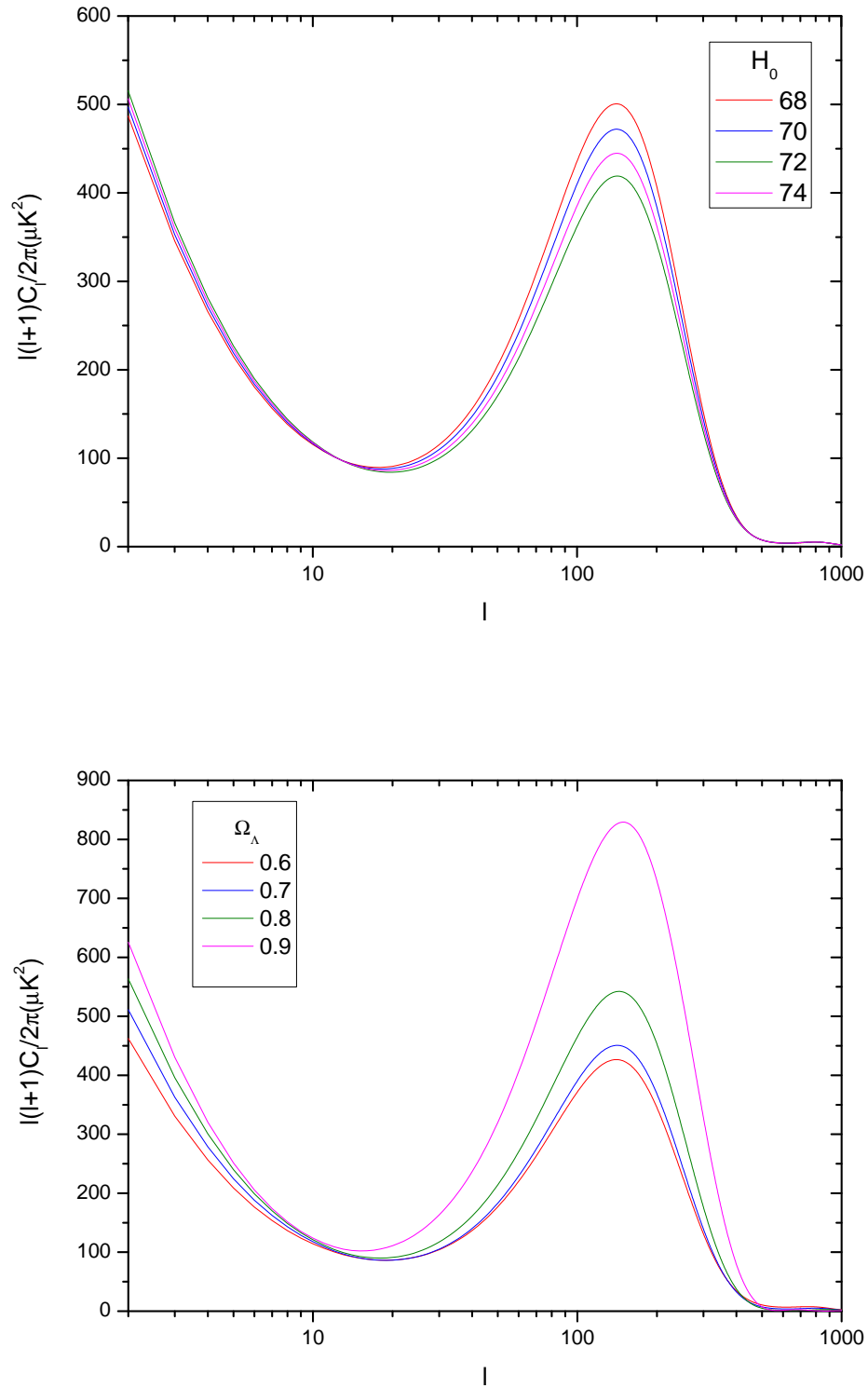


Figura 3.1: Variazione dello spettro dell'ISW al variare della costante di Hubble (sopra) e di Ω_Λ (sotto). Si vede il picco dell'early ISW a $l < 200$ e l'andamento del late ISW per $l < 100$. Gli spettri sono stati ottenuti col programma CMBFAST.

Effetto early ISW

Se la radiazione assume importanza tra le componenti dell'universo, si ha un $\dot{\Phi} \neq 0$. Come abbiamo constatato nel paragrafo 2.1, l'equivalenza tra radiazione e materia è di poco precedente l'epoca dell'ultimo scattering, perciò il potenziale gravitazionale decade proprio nella fase iniziale della dominazione della materia, producendo un effetto detto *early ISW* (vedi figura 3.1).

Questo effetto è massimo quando è bassa la densità di materia. Visto che a quell'epoca le dimensioni dell'universo erano minori di quelle attuali, questo fenomeno riguarderà solo le piccole scale, quelle con k^{-1} comparabile con la scala temporale del tempo che stiamo considerando, che è dell'ordine di grandezza della scala dell'orizzonte all'ultimo scattering, per cui l'early ISW si manifesta per scale con $l < 200$, e presenta un massimo molto vicino al primo picco Doppler dello spettro di potenza delle anisotropie della CMB. I modi con lunghezza d'onda minore oscillano in continuazione durante la variazione del potenziale, dunque i contributi, sia negativi che positivi, si cancellano reciprocamente.

A differenza del late ISW, che vedremo dopo, lo spettro dell'early ISW è difficile da isolare dal contributo preponderante delle anisotropie primarie della CMB.

Effetto late ISW

Come nel caso di una presenza non trascurabile della radiazione, nel primo periodo di dominazione della materia, anche quando comincia l'era dominata dall'energia oscura, si ha una variazione del potenziale gravitazionale che causa l'effetto *late ISW* (vedi figura 3.1). Questo effetto si distingue dal precedente perché, sviluppandosi in tempi recenti, coinvolge esclusivamente le grandi scale, che corrispondono a momenti di multipolo $l < 100$, che sono le scale maggiormente affette dalla varianza cosmica.

Da un punto di vista quantitativo, l'ampiezza del contributo di questo effetto è pari circa al 10% del totale dello spettro delle anisotropie, dal quale non può essere facilmente distinto. Vedremo in seguito che per distinguere il segnale dell'ISW da quello totale sarà necessario effettuare una cross-correlazione con dati di cataloghi di galassie.

L'importanza del late ISW sta nel fatto che una sua misurazione dimostra che l'universo è recentemente entrato in una fase dominata dall'energia oscura.

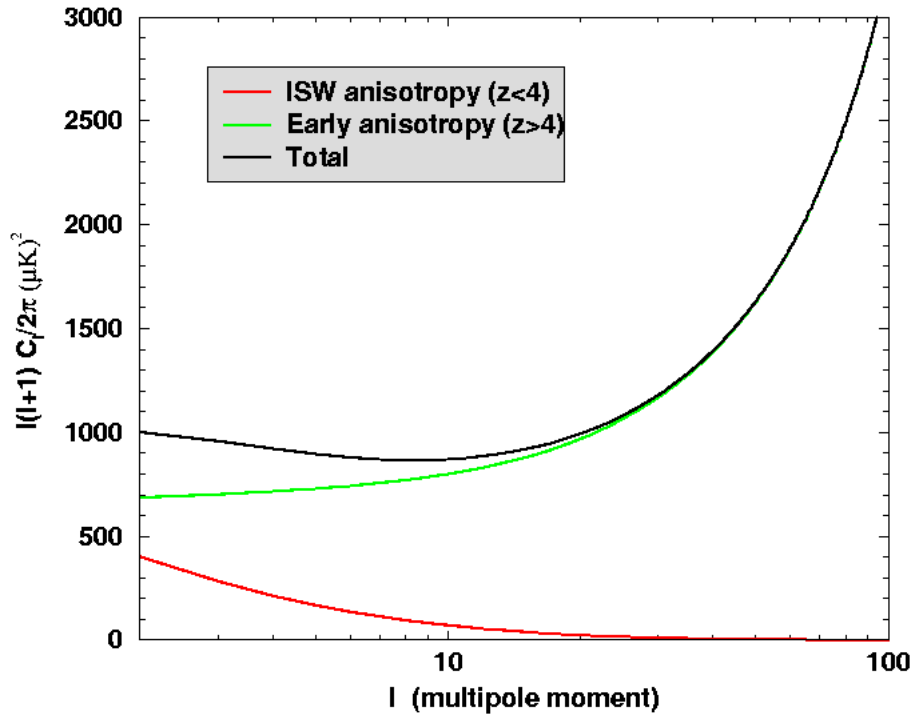


Figura 3.2: Il contributo dell'effetto late ISW risulta molto minore di quello delle anisotropie primarie, tra cui anche l'effetto early ISW, difficilmente distinguibile da queste ultime.

ra. Infatti, la sua dipendenza da $\dot{\Phi}$, implica l'esistenza dell'energia oscura se si esclude, come abbiamo visto nel capitolo 1, la presenza di una curvatura non nulla.

3.2 La correlazione temperatura-materia

Sapendo da osservazioni della CMB, come WMAP o Boomerang [34], che l'universo è pressoché piatto, possiamo attribuire l'effetto late ISW alla presenza di energia oscura. Una sua misura può quindi dare una prova dell'energia oscura e delle sue caratteristiche, nonché della sua evoluzione col tempo. In particolare, l'effetto ISW è uno dei pochi metodi che permettono di misurare la velocità del suono dell'energia oscura.

Tuttavia, la misura dell'effetto ISW [3, 16, 90, 25, 21], anche attraverso le lenti gravitazionali deboli [30] o la polarizzazione della CMB [18], è resa difficile dal fatto che il suo piccolo segnale è nascosto nel dieci volte più grande

contributo delle anisotropie primarie della CMB.

Oltretutto, il segnale ISW totale proviene da tutte le fluttuazioni di densità, sia positive che negative, lungo la linea di vista. Sulle piccole scale, le differenze di temperatura sono piccole e tendono a cancellarsi l'un l'altra. Il contributo maggiormente significativo viene da potenziali presenti a larga scala, purtroppo le stesse scale sono proprio quelle affette dalla varianza cosmica [27]. Questo problema può essere risolto esaminando come le fluttuazioni della temperatura dell'ISW sono correlate con la densità delle galassie, che sono in grado di tracciare abbastanza bene le buche, o creste, di potenziale che sono all'origine delle anisotropie ISW.

L'anisotropia della temperatura della CMB dovuta all'effetto ISW è data dalla [78]:

$$\Delta(\hat{\mathbf{n}})^{ISW} = \frac{\delta T^{ISW}}{T}(\hat{\mathbf{n}}) = \int_{\eta_s}^{\eta_0} [dot\Phi((\eta_0 - \eta)\hat{\mathbf{n}}, \eta) - \dot{\Psi}((\eta_0 - \eta)\hat{\mathbf{n}}, \eta)] e^{-\tau(\eta)} d\eta \quad (3.5)$$

già vista nel paragrafo precedente. L'anisotropia della temperatura ISW può essere correlata con la *distribuzione di galassie* sulla sfera celeste:

$$\delta_g(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{N(\hat{\mathbf{n}}) - \bar{N}}{\bar{N}} \quad (3.6)$$

dove $\delta_g(\hat{\mathbf{n}})$ rappresenta la sovradensità di galassie nella direzione $\hat{\mathbf{n}}$, $N(\hat{\mathbf{n}})$ è il numero di galassie nel pixel corrispondente alla direzione $\hat{\mathbf{n}}$ e \bar{N} è il numero medio di galassie per pixel. Assumiamo qui, che le galassie usate siano tutte appartenenti ad una regione di redshift fissato, caratterizzata da una funzione di selezione delle galassie normalizzata: $W_g(z)$.

Questa funzione di distribuzione può essere suddivisa in *bin*, centrati a redshift diversi, così da avere un campionamento di galassie più fitto, oppure, per semplicità, può essere assunta come una singola funzione di distribuzione. Discuteremo tutti questi aspetti nel seguito di questo capitolo.

Assumiamo ora che la sovradensità di galassie (materia barionica) 3.6 tracci le fluttuazioni di densità della materia oscura $\delta_c(\hat{\mathbf{n}})$, che rappresenta circa l'80% della materia totale, attraverso la relazione:

$$\delta_g(\hat{\mathbf{n}}) = b_g \delta_c(\hat{\mathbf{n}}) \quad (3.7)$$

dove b_g è il bias galattico [42] lineare, ma che può anche dipendere dal redshift, e derivare da due diversi contributi, (esaminati in [80]): infatti vi può essere una componente che discende direttamente da una magnificazione operata dall'effetto delle lenti gravitazionali sulle galassie. La fluttuazione di densità della materia oscura può essere scritta come un integrale sul tempo conforme:

$$\delta_c(\hat{\mathbf{n}}) = \int_{\eta_s}^{\eta_0} d\eta \frac{dz}{d\eta} W_g(z(\eta)) \delta_c((\eta_0 - \eta)\hat{\mathbf{n}}, \eta) \quad (3.8)$$

dove $\delta_c(\mathbf{x}, \eta)$ è la fluttuazione di densità tridimensionale, direttamente collegata al potenziale gravitazionale tramite l'equazione di Poisson.

Quello a cui siamo interessati è il calcolo della *funzione di cross-correlazione*

$$X(\theta) = X(|\hat{\mathbf{n}}_1 - \hat{\mathbf{n}}_2|) = \left\langle \frac{\delta T^{ISW}}{\bar{T}}(\hat{\mathbf{n}}_1) \delta_g(\hat{\mathbf{n}}_2) \right\rangle \quad (3.9)$$

da intendersi come media d'insieme, e θ è l'angolo tra le direzioni $\hat{\mathbf{n}}_1$ e $\hat{\mathbf{n}}_2$. $X(\theta)$ rappresenta la funzione di cross-correlazione, che può essere quella tra materia e temperatura, che vedremo nella prossima sezione, oppure quello della auto-correlazione della materia o della temperatura.

3.2.1 Spettro di cross-correlazione temperatura-galassie

Siccome l'effetto ISW ha luogo quando assume importanza il contributo dell'energia oscura, è utile calcolare la correlazione tra le fluttuazioni di temperatura della CMB e un dato catalogo di galassie. Infatti, in tempi recenti, le strutture galattiche erano presenti, sia quelle visibili a noi che quelle formate da materia oscura. Un altro vantaggio sta nel fatto che la correlazione elimina tutto il segnale, maggioritario, proveniente dalle anisotropie primarie che sono completamente scorrelate con le galassie. Spieghiamo ora, passaggio dopo passaggio [78], i dettagli del calcolo della cross-correlazione. Definiamo [73]:

$$\Delta(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{T(\hat{\mathbf{n}}) - T_0}{T_0} \quad (3.10)$$

e

$$\delta(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{\rho(\hat{\mathbf{n}}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (3.11)$$

dove $T(\hat{\mathbf{n}})$ è la temperatura della CMB misurata lungo la direzione $\hat{\mathbf{n}}$, $\rho(\hat{\mathbf{n}})$ è la densità di massa lungo $\hat{\mathbf{n}}$, e T_0 e $\bar{\rho}$ sono le temperatura CMB e densità di massa medie. L'anisotropia di temperatura dovuta all'effetto ISW è data dalla 3.5, mentre la fluttuazione di densità della materia, che contiene i contributi da oggetti astrofisici (galassie) a redshift differenti, è data dalla 3.8. Noi siamo interessati alla funzione di cross-correlazione tra materia e temperatura; dalla 3.9:

$$C^{gT}(\theta) = C^{gT}(|\hat{\mathbf{n}}_1 - \hat{\mathbf{n}}_2|) = \langle \Delta(\hat{\mathbf{n}}_1) \delta_c(\hat{\mathbf{n}}_2) \rangle \quad (3.12)$$

dove vale la stessa notazione enunciata prima. Introduciamo la quantità $r = \eta_0 - \eta$. L'espansione in serie di Fourier per $\dot{\Phi}(r\hat{\mathbf{n}}, \eta)$ è:

$$\dot{\Phi}(r\hat{\mathbf{n}}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \dot{\Phi}(\mathbf{k}, \eta) e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}r} \quad (3.13)$$

facciamo la stessa cosa sia per $\dot{\Psi}(r\hat{\mathbf{n}}, \eta)$ che per $\delta_g(r\hat{\mathbf{n}}, \eta)$, con k che è il numero d'onda. Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} C^{gT}(\theta) &= \int_{\eta_k}^{\eta_0} d\eta_1 \int_{\eta_k}^{\eta_0} d\eta_2 \dot{z}(\eta_2) e^{-\tau(\eta_1)} W_g(z(\eta_2)) \\ &\times \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \\ &\times \langle [\dot{\Phi}(\mathbf{k}, \eta_1) - \dot{\Psi}(\mathbf{k}, \eta_1)] \delta(\mathbf{k}', \eta_2) \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

dove η_k è un tempo per cui un dato modo k è ben al di fuori dell'orizzonte. Finché l'evoluzione di ogni modo di Fourier dipende solamente dal modulo $k = |\mathbf{k}|$, possiamo separare le dipendenze rispetto al tempo ed alla direzione:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{k}, \eta) &= \Phi(\mathbf{k}, \eta_k) \phi(k, \eta) \\ \Psi(\mathbf{k}, \eta) &= \Psi(\mathbf{k}, \eta_k) \psi(k, \eta) \\ \delta(\mathbf{k}, \eta) &= \delta(\mathbf{k}, \eta_k) \tilde{\delta}(k, \eta) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Per condizioni iniziali adiabatiche le soluzioni crescenti per δ , Φ , Ψ sono legate le une alle altre tramite le relazioni:

$$\begin{aligned} c_{\delta\Psi} &= \frac{\delta}{\Psi} = -\frac{3}{2} \\ c_{\Phi\Psi} &= \frac{\Phi}{\Psi} = -\left(1 + \frac{2}{5}R_\nu\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

dove $R_\nu = \rho_\nu/(\rho_\gamma + \rho_\nu)$, e ρ_ν è la densità d'energia dei neutrini relativistici. Per $N_\nu = 3$ sapori di neutrino, dopo l'annichilazione fra coppie di elettroni e positroni: $\rho_\nu/\rho_\gamma = (7N_\nu/8)(4/11)^{4/3}$. Questo ci aiuta a scrivere, applicando la definizione 3.15 alla quantità nella media d'insieme che compare come ultimo fattore nella 3.14, che questa può essere separata tra spettro di potenza iniziale, che contiene tutte le informazioni rilevanti per la media d'insieme, e parte che evolve nel tempo, che è la stessa:

$$\begin{aligned} &\langle [\dot{\Phi}(\mathbf{k}, \eta_1) - \dot{\Psi}(\mathbf{k}, \eta_1)] \delta(\mathbf{k}', \eta_2) \rangle = \\ &= c_{\delta\Psi} \langle \Psi(\mathbf{k}, \eta_k) \Psi(\mathbf{k}', \eta_k) \rangle \left[c_{\Phi\Psi} \dot{\phi}(k, \eta_1) - \dot{\psi}(k, \eta_1) \right] \tilde{\delta}(k', \eta_2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dall'omogeneità dello spazio segue che:

$$\langle \Psi(\mathbf{k}, \eta_k) \Psi(\mathbf{k}', \eta_k) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_\Psi(k) \quad (3.18)$$

dove $P_\Psi(k)$ è lo *spettro di potenza gravitazionale primordiale*, collegato allo *spettro di potenza della curvatura* $P_{\mathcal{R}} = 2\pi^2 \Delta_{\mathcal{R}}^2/k^3$, dalla relazione:

$$P_\Psi(k) = \frac{9}{25} P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{9}{25} \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta_{\mathcal{R}}^2 \quad (3.19)$$

Solitamente è lo *spettro di potenza della materia* oggi $\Delta_{\mathcal{R}}^2$ quello che si usa, più che lo spettro primordiale. Se le fluttuazioni nell'energia oscura sono più piccole di quelle nella materia oscura ($\delta\rho_{DE} \ll \delta\rho_c$), per $z \rightarrow 0$ si ha: $\Phi - \Psi \approx -\frac{H^2}{k^2}(\delta\rho_{DE} + \delta\rho_c)$. Usando le equazioni 3.17 e 3.18, e con qualche manipolazione, possiamo riscrivere la 3.14 come:

$$C^{gT}(\theta) = \frac{9}{25} \int_{\eta_k}^{\eta_0} d\eta_1 \int_{\eta_k}^{\eta_0} d\eta_2 \dot{z}(\eta_2) e^{-\tau(\eta_1)} W_g(z(\eta_2)) \times \int \frac{dk}{k} \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) \frac{\sin(kR)}{kR} F(k, \eta_1, \eta_2) \quad (3.20)$$

$F(k, \eta_1, \eta_2) = c_{\delta\Psi} [c_{\Phi\Psi} \phi(k, \eta_1) - \psi(k, \eta_1)] \tilde{\delta}(k, \eta_2)$ e $R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}$. Per poter usare l'equazione 3.20 bisogna prima sottrarre i termini di monopolo e dipolo. In pratica dobbiamo risolvere la doppia integrazione. Possiamo fare ciò con due approssimazioni: quella di piccoli angoli ($\theta \ll 1$), e quella di piccola separazione ($|r_1 - r_2| \ll r_1$). Cambiando la variabile d'integrazione a $x = r_1 - r_2$ con $r = (r_1 + r_2)/2$ (oppure $\eta = (\eta_1 + \eta_2)/2$) possiamo scrivere:

$$C^{gT}(\theta) \approx \frac{9}{25} \int_{\eta_k}^{\eta_0} d\eta \dot{z}(\eta) e^{-\tau(\eta)} W_g(z(\eta)) \times \int \frac{dk}{k} \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) F(k, \eta_1, \eta_2) \int_{-2r}^{2r} dx \frac{\sin(kR)}{kR} \quad (3.21)$$

con $R = \sqrt{x^2 + r^2 \theta^2}$. Possiamo assumere che $2r$ è sufficientemente grande ($r > 1/k\theta$) sulle scale rilevanti per sostituire i limiti dell'integrale $[-2r, 2r]$ con $[-\infty, \infty]$. L'integrale da il risultato:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(kR)}{kR} = \frac{\pi}{k} J_0(kr\theta)$$

dove J_0 è la funzione di Bessel di primo tipo¹ di ordine zero. Facciamo, ora, un ulteriore passo espandendo l'equazione 3.21 in serie di polinomi di Legendre:

$$C^{gT}(\theta) = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} C_l^{gT} P_l(\cos \theta) \quad (3.22)$$

dove non abbiamo incluso nella sommatoria i termini di monopolo ($l = 0$) e dipolo ($l = 1$). Questa è la funzione di correlazione angolare a due punti tra

¹Le equazioni di Bessel di primo tipo sono espresse dalla relazione $J_\alpha(z) = (\frac{z}{2})^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{\Gamma(n+\alpha+1)n!}$ e godono della seguente proprietà: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

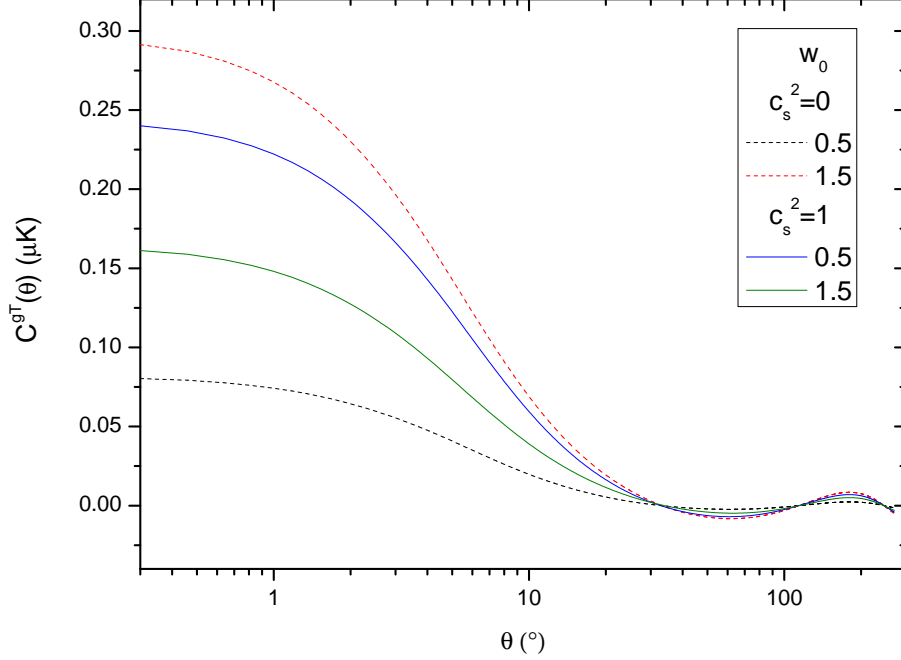


Figura 3.3: La funzione di correlazione angolare a due punti per diversi valori dell'equazione di stato dell'energia oscura e della velocità del suono nell'energia oscura.

le strutture a larga scala (LSS) e la CMB. Nella figura 3.3 vediamo come, per un modello di universo con costante di Hubble $H_0 = 71.9$, $\Omega_\Lambda = 0.69$, densità barionica $\Omega_b h^2 = 0.027$, $\Omega_\nu = 0.031$, indice spettrale scalare $n_s = 0.963$, ampiezza delle perturbazioni primordiali $A_s = 1$, reionizzazione per $\tau = 0.08$ e con bias $b_g = 1.9$, usando la distribuzione di galassie SDSS LRG, si ottengono delle curve, al variare dell'equazione di stato dell'energia oscura w e della sua velocità del suono c_s^2 , molto diverse fra loro. Notiamo che a piccoli angoli la funzione di correlazione è caratterizzata da un plateau quasi costante, mentre per angoli più grandi ($\theta > 10^\circ$) si annulla velocemente. Si vede inoltre che proprio la zona a piccoli angoli è sensibile ai parametri dell'energia oscura; questo solo per dire che l'effetto ISW è particolarmente adatto al suo studio. I coefficienti C_l^{gT} della 3.22 possono essere scritti come:

$$C_l^{gT} = 4\pi \frac{9}{25} \int \frac{dk}{k} \Delta_{\mathcal{R}}^2 \Delta_l^{ISW}(k) M_l(k) \quad (3.23)$$

dove le funzioni $\Delta_l^{ISW}(k)$ e $M_l(k)$ sono definite dalle:

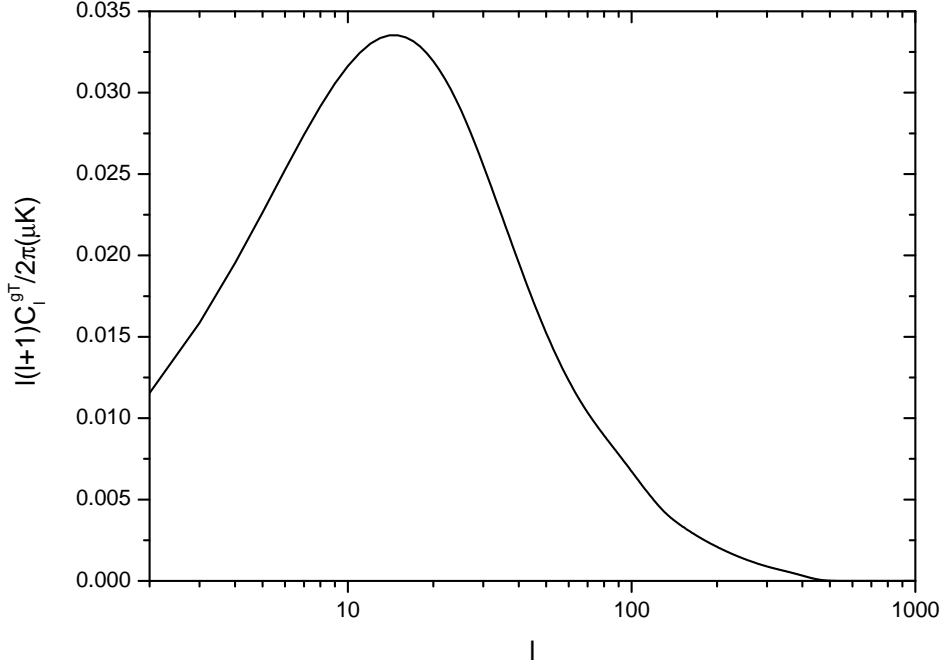


Figura 3.4: La forma caratteristica dello spettro di cross-correlazione che mette in evidenza il contributo dell'effetto ISW. I coefficienti C_l^{gT} sono quelli definiti dalla relazione 3.23

$$\Delta_l^{ISW}(k) = \int_{\eta_k}^{\eta_0} e^{-\tau(\eta)} d\eta j_l(k[\eta_0 - \eta]) (c_{\Phi\Psi} \dot{\phi}(k, \eta) - \dot{\psi}(k, \eta)) \quad (3.24)$$

$$M_l(k) = b_g c_{\delta, \Psi} \int_{\eta_k}^{\eta_0} d\eta j_l(k[\eta_0 - \eta]) \dot{z} W_g(z(\eta)) \tilde{\delta}(k, \eta) \quad (3.25)$$

dove $j_l(\cdot)$ sono le *funzioni di Bessel sferiche*, definite dall'espressione

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x)$$

La scelta della funzione di selezione $W_g(z)$ dipende da quale campione di dati di strutture a larga scala si vuole considerare. Bisogna anche tenere conto del possibile fattore di bias tra la distribuzione degli oggetti osservati e la distribuzione della materia oscura sottostante. $C_l^{gT}(\theta)$ può essere particolarmente utile per differenziare tra modelli di energia oscura con $w = \text{cost}$ o con w che varia col tempo attraverso il fattore di scala.

3.2.2 Lo spettro di cross-correlazione al variare dei parametri cosmologici

Vediamo ora il comportamento dello spettro della cross-correlazione tra temperatura e materia, che permette di mettere in evidenza l' ISW, al variare dei principali parametri cosmologici. In particolare prenderemo in esame: il parametro di densità di materia Ω_m , la costante di Hubble H_0 , il parametro di densità di neutrini Ω_ν , l'indice spettrale scalare n_s , il parametro dell'energia oscura w_0 .

Variazione della densità di materia

Nella figura 3.5 facciamo variare il parametro di densità di materia Ω_m . Si vede che il picco dello spettro della correlazione è sensibile alla variazione di questo parametro: passa da piccoli a grandi multipoli all'aumentare di Ω_m , in conseguenza dello spostamento dell'epoca in cui l'energia oscura diventa importante. Infatti la curvatura nulla dell'universo, implica che all'aumento della densità di materia corrisponda una diminuzione di Ω_Λ . Per cui all'aumentare di Ω_m diminuisce l'ampiezza dello spettro di cross-correlazione perché l'effetto ISW è causato proprio dalla presenza dell'energia oscura, e più ce n'è, più l'ampiezza aumenta.

Variazione della costante di Hubble

Come si vede dalla figura 3.6 una variazione, anche significativa, del valore della costante di Hubble non causa una grande variazione dello spettro di cross-correlazione dell'ISW; variazioni del suo valore numerico portano solo ad un piccolo fattore di rinormalizzazione, che può essere facilmente confuso con errori sistematici ed altre cause.

Variazione dei parametri dell'energia oscura

Quelli che più interessano la nostra indagine sono, invece, i parametri dell'energia oscura: quelli dell'equazione di stato (sia costante che variabile nel tempo) e la velocità del suono nell'energia oscura. Infatti l'effetto ISW non è sensibile solo al contenuto energetico dell'energia oscura, ma anche alla sua evoluzione ed al clustering. Nella figura 3.8 si vede come si comportano gli spettri di cross-correlazione al variare del parametro w_0 per $c_s^2 = 0$ e $c_s^2 = 1$. Nel primo grafico, con $c_s^2 = 1$, si vede come per $w = -0.8$ si raggiunge un massimo dell'ampiezza della correlazione, mentre questa decresce per gli altri valori sia più bassi che più alti. Questo perché far avvicinare w_0 allo 0, equivale ad annullare la densità di energia dell'energia oscura, che corrisponde a

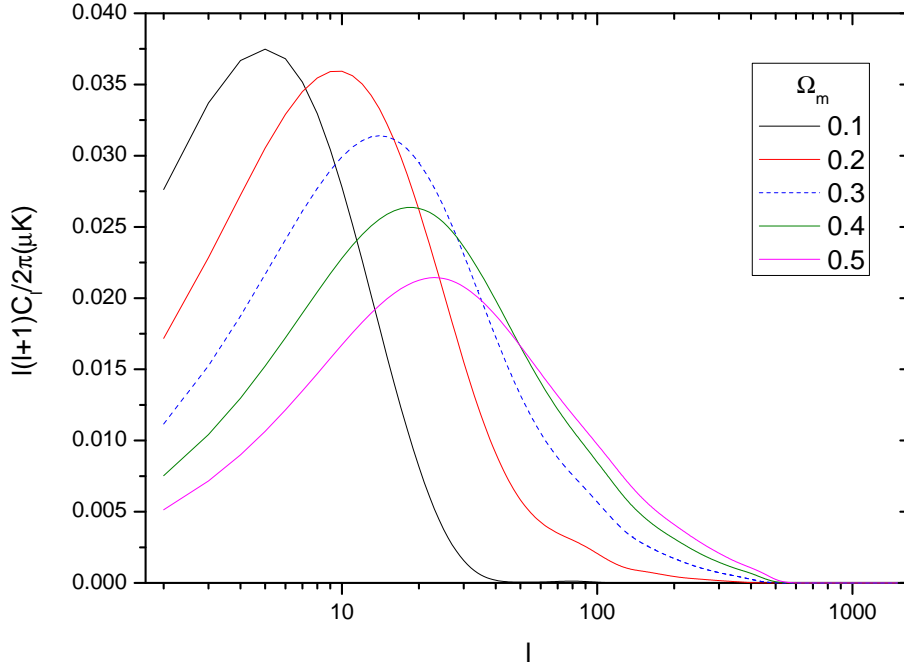


Figura 3.5: Variazioni dello spettro di cross-correlazione al variare del parametro di densità di materia Ω_m .

tornare ad un universo dominato dalla materia dove non ci può essere effetto ISW, come abbiamo spiegato, essendo costante il potenziale gravitazionale. Oltretutto un'equazione di stato con un $w_0 < -1$ vuol dire che l'energia oscura ha acquistato importanza da poco tempo riducendo così l'ISW. Se invece $c_s^2 = 0$ l'ampiezza della correlazione decresce in maniera monotona all'aumentare di w . Questo perché la formazione di strutture (clustering) nell'energia oscura modifica il decadimento del potenziale in modo tale che l'ampiezza dell'effetto ISW aumenta quando w diminuisce. Anche da questi confronti si vediamo che l'effetto ISW permette di porre dei vincoli sui parametri dell'energia oscura [87].

Variatione della densità dei neutrini e dei barioni

Inserendo una densità di neutrini non nulla, figura 3.9 (sopra), considerando tre specie di neutrini massivi e 0 relativistici, osserviamo che l'ampiezza dell'effetto ISW diminuisce all'aumentare di Ω_ν . Poiché se l'universo è piatto,

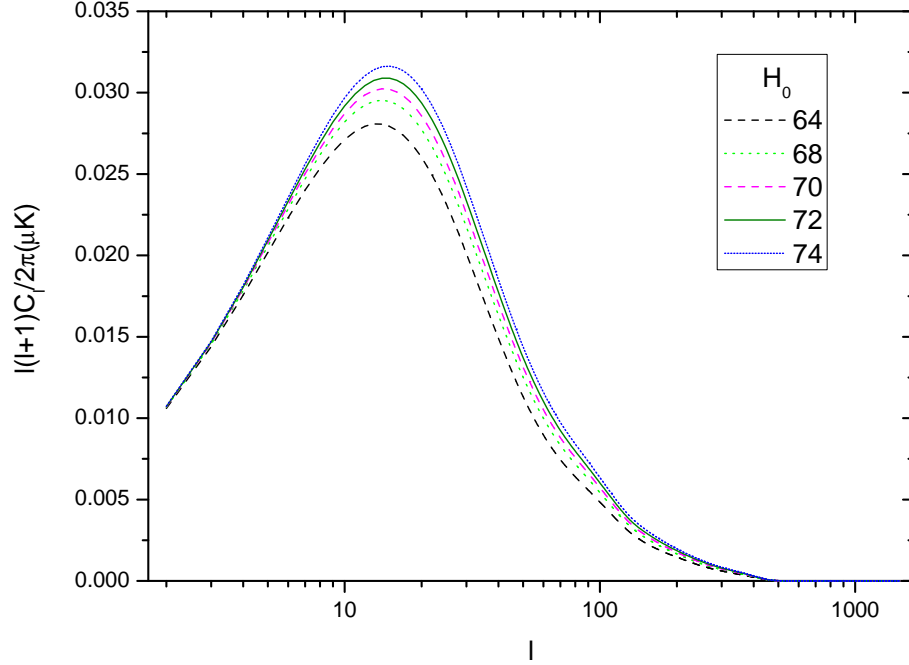


Figura 3.6: Variazione dello spettro di cross-correlazione al variare del parametro di Hubble.

e quindi $\Omega_{tot0} = 1$, avere una densità d'energia dei neutrini diversa da zero implica una diminuzione di Ω_Λ , e quindi dell'effetto ISW. Lo stesso è per le stesse ragioni avviene facendo variare il parametro di densità dei barioni Ω_b (vedi figura 3.7).

Variazione dell'indice spettrale scalare

Ricordiamo che l'effetto ISW è sensibile anche alla variazione dell'indice spettrale scalare n_s . Come vediamo dalla figura 3.9 (sotto), al diminuire di n_s il picco del segnale si sposta verso i piccoli multipoli. Questo comportamento, detto tilt, è codificato dalla relazione:

$$\frac{C_l(n)}{C_l(n=1)} \simeq \left(\frac{l}{10}\right)^{n_s-1} \quad (3.26)$$

Questo perché nella 3.23 compare lo spettro di potenza della materia (vedi 3.19), che se $n_s \neq 1$, ha un andamento:

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 \rightarrow \Delta_{\mathcal{R}}^2 k^{n_s-1} \quad (3.27)$$

che sostituita nella 3.23 porta a:

$$C_l^{gT} = 4\pi \frac{9}{25} \int dk k^{n_s+1} \Delta_{\mathcal{R}}^2 \Delta_l^{ISW}(k) M_l(k) \quad (3.28)$$

Pertanto, per $n_s < 1$ si ha un aumento del segnale per piccole scale k (grandi l) e una sua diminuzione per grandi scale e piccoli multipoli. Tutto il contrario se $n_s > 1$.

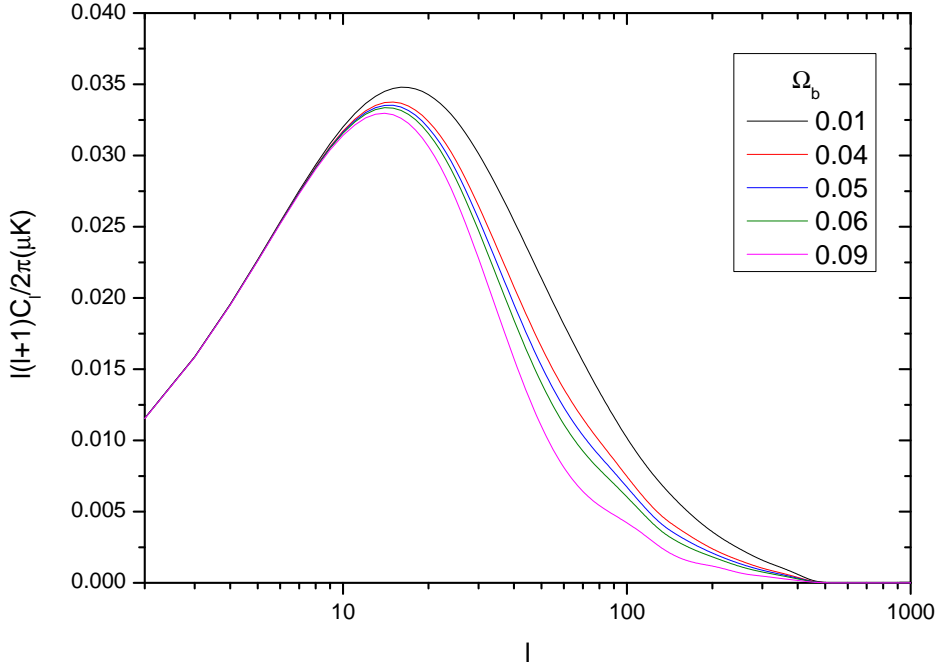


Figura 3.7: Variazione dello spettro di cross-correlazione al variare del parametro di densità dei barioni Ω_b .

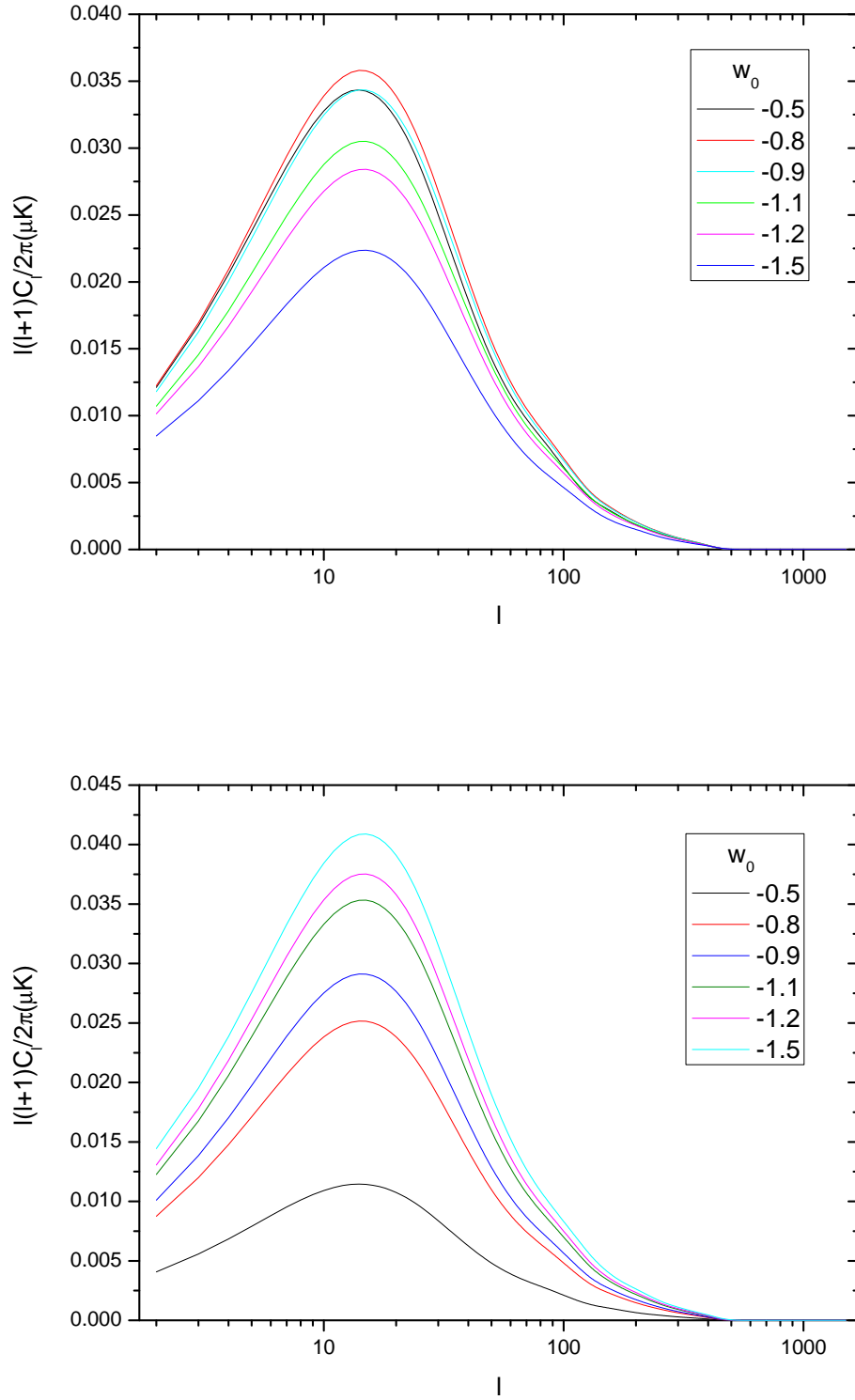


Figura 3.8: Variazione dello spettro di cross-correlazione al variare dell'equazione di stato dell'energia oscura costante w_0 per $c_s^2 = 1$ (sopra) e $c_s^2 = 0$ (sotto).

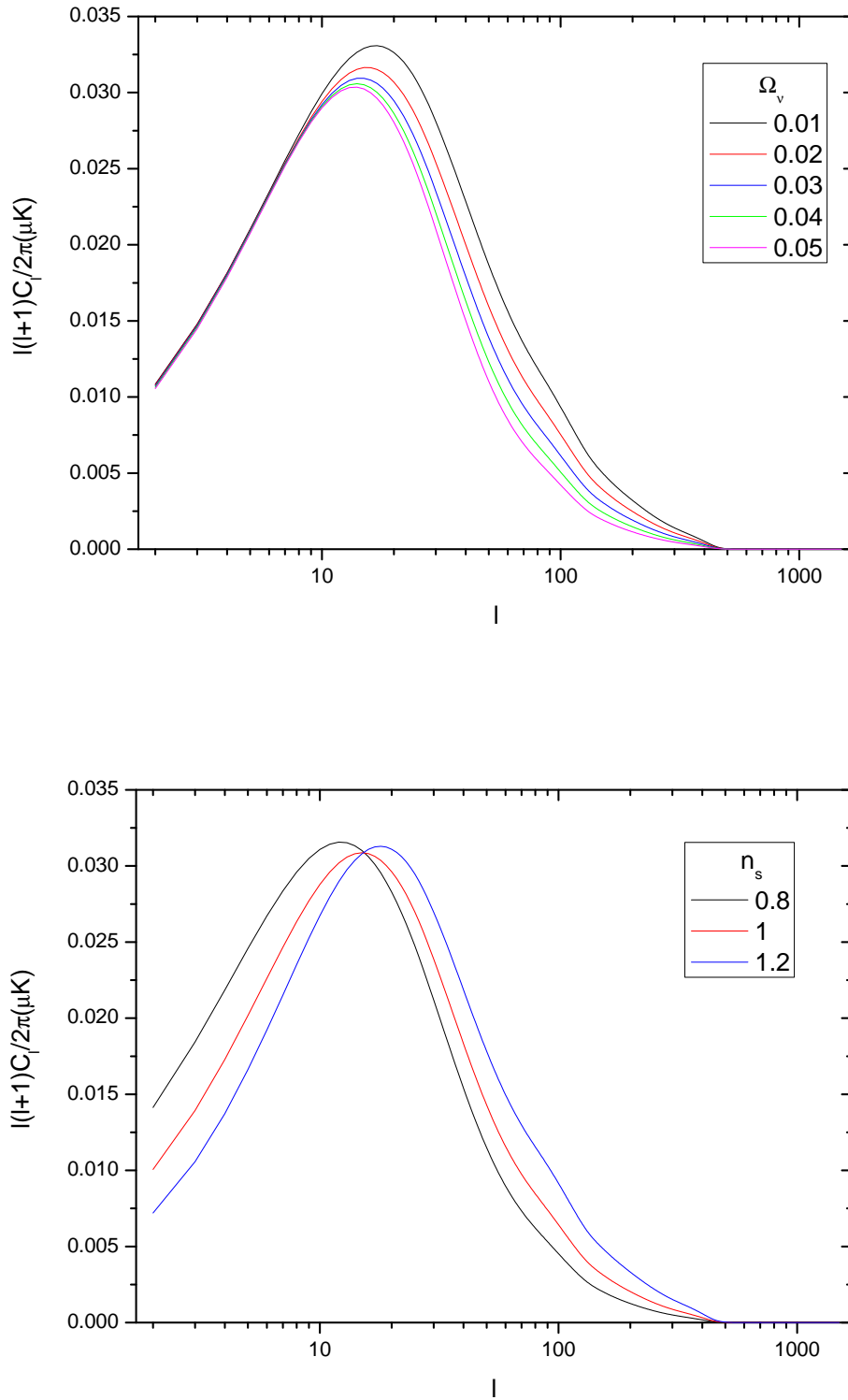


Figura 3.9: Variazione dello spettro di cross-correlazione al variare della densità d'energia dei neutrini Ω_ν (sopra), ed evidenza del Tilt dalla variazione dello spettro di cross-correlazione al variare dell'indice spettrale scalare n_s (sotto).

3.3 Spettri di autocorrelazione

Prima abbiamo considerato la correlazione tra le fluttuazioni di temperatura della CMB ed un campione di galassie definito da una singola funzione di selezione. Campioni di galassie futuri potranno essere utili per separare la funzione di distribuzione in più bin di redshift, potendo poi considerare diverse correlazioni tra i diversi bin: X_l^i , dove l'apice i distingue tra i diversi bin considerati.

Queste possono essere calcolate utilizzando differenti funzioni di selezione $W_g^i(z)$, ognuna delle quali ha una corrispondente funzione peso $M_l^i(k)$. Per ogni bin consideriamo un fattore di bias costante $b_g = 1.9$. Quest'ultimo può essere determinato [78, 80] dalle osservazioni delle funzioni di autocorrelazione galassie-galassie. Queste funzioni di autocorrelazione sono derivate allo stesso modo di quelle fra temperatura e materia, che abbiamo visto nel paragrafo 3.2.1:

$$C^{gg(i,j)}(\theta) = \langle \delta_c^i(\hat{\mathbf{n}}_1) \delta_c^j(\hat{\mathbf{n}}_2) \rangle \quad (3.29)$$

Abbiamo delle funzioni di correlazione $C^{gg(i,j)}(\theta)$, corrispondenti alle correlazioni tra tutti i possibili bin di redshift, rappresentati dagli indici (i, j) . Con la stessa procedura di prima i coefficienti dell'espansione in serie di polinomi di Legendre della funzione di autocorrelazione galassie-galassie sono dati da:

$$C_l^{gg(i,j)} = 4\pi \frac{9}{25} \int \frac{dk}{k} \Delta_{\mathcal{R}}^2 M_l^i(k) M_l^j(k) \quad (3.30)$$

L'autocorrelazione C_l^{TT} totale della CMB contiene le anisotropie primarie, originate alla superficie di ultimo scattering, così come i contributi dell'effetto ISW, dell'effetto SZ ed altri meccanismi:

$$C_l^{TT} = C_l^{LS} + C_l^{ISW} + C_l^{SZ} + \dots \quad (3.31)$$

Le anisotropie non correlate alla superficie di ultimo scattering dominano il rumore nella misura della cross-correlazione. In particolare, il contributo dell'ISW domina la cross-correlazione tra la distribuzione di galassie e le anisotropie della CMB sulle grandi scale (dove il segnale ISW è più forte), mentre l'effetto SZ è presente solo alle piccole scale [71] angolari, essendo causato da strutture ben definite come sono gli ammassi di galassie. Il contributo SZ può essere eliminato mediando² le mappe della CMB su scale angolari più piccole di quella tipica, per le anisotropie della CMB di 1°: perciò trascureremo il contributo dell'SZ d'ora in avanti.

²si prende la mappa considerata e la si moltiplica per un filtro gaussiano 2D normalizzato ad uno con una certa varianza che determina la scala del filtraggio, tutto quello che sta al disopra del FWHM passa, il resto viene soppresso.

3.4 Il rapporto segnale rumore teorico

La capacità di rilevare il segnale di cross-correlazione è limitata perché il segnale diminuisce alle piccole scale. Non solo la varianza cosmica ha una importanza non trascurabile, ma anche la, magari non perfetta, correlazione tra la distribuzione di galassie e le anisotropie della CMB prodotte all'epoca dell'ultimo scattering. Per ridurre l'impatto di queste correlazioni accidentali sono richieste delle misure indipendenti in gran numero, è quindi fondamentale avere una survey di galassie che copra una regione di cielo abbastanza ampia, visto che l'ISW si manifesta alle grandi scale. Il rapporto segnale rumore della funzione di cross-correlazione per un particolare campione di galassie è dato da [52]:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \sum_l (2l+1) \frac{(C_l^{gT})^2}{C_l^{gg} C_l^{TT} + (C_l^{gT})^2} \quad (3.32)$$

Per l'effetto ISW consideriamo generalmente il regime di debole correlazione, cosicché $C_l^{gT}/(C_l^{gg} C_l^{TT})^{1/2} \ll 1$. Questo segnale rumore può essere separato per ottenere il contributo in funzione del redshift. Per un modello cosmologico standard Λ CDM, la maggior parte del segnale viene da zone con $z < 3$, con un picco intorno a $z \simeq 0.5$. Mentre il segnale è più alto a basso redshift, misure più indipendenti sono però possibili a redshift più alto. Il segnale rumore ha un andamento che va come la radice della frazione di cielo osservata. Nel caso, molto ottimistico, in cui la distribuzione di galassie segue esattamente l'evoluzione dell'effetto ISW, si ha che $C_l^{gT} = C_l^{gg} = C_l^{ISW}$, dove C_l^{ISW} è lo spettro delle anisotropie della temperatura per il solo contributo ISW, che assumiamo essere assai minore dello spettro totale delle anisotropie: $C_l^{ISW} \ll C_l^{TT}$. Dunque il rapporto segnale rumore diventa:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \sum_l (2l+1) \frac{C_l^{ISW}}{C_l^{TT}} \quad (3.33)$$

Che porta ad avere un rapporto totale $(S/N) \simeq 7 - 10$ per un modello standard Λ CDM. In futuro, con dei campioni di galassie migliori, questi valori potranno essere migliorati.

3.5 Funzione di distribuzione di una survey di galassie

Per descrivere la distribuzione delle galassie in un dato campione prendiamo la densità numerica totale delle galassie, che corrisponde alla sommatoria

delle densità dei singoli bin in cui abbiamo suddiviso la distribuzione totale [70]:

$$n_g^{tot}(z) = \sum_i n_g^i(z) \quad (3.34)$$

dove $n_g^i(z)$ sono le funzioni di distribuzione per i diversi bin, calcolate grazie alla relazione:

$$n_g^i(z) = \frac{1}{2} n_g^{tot}(z) \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{(i-1)\Delta z - z}{\sqrt{2}\sigma(z)} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{i\Delta z - z}{\sqrt{2}\sigma(z)} \right) \right] \quad (3.35)$$

dove Δz è la larghezza dei bin considerati, sul cui valore ci soffermeremo dopo; l'importanza della larghezza sta nel fatto che delle funzioni di distribuzione strette portano un minore segnale correlativo e di conseguenza una maggiore incertezza; tuttavia in questo modo aumentano i valori di redshift scorrelati portando ad una migliore ricostruzione dell'evoluzione in redshift del segnale di correlazione. Anche per questo è molto utile dividere la funzione di distribuzione totale in bin centrati a redshift diversi, in modo da migliorare il segnale correlativo e la sua evoluzione nel tempo (redshift), anche in funzione dei vincoli da porre sui parametri dell'energia oscura, in particolare su una sua variazione temporale. Tornando alla relazione 3.35: l'indice i differenzia tra i vari bin, mentre erfc è la funzione complementare d'errore, definita dalla:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

Assumiamo inoltre che gli errori sul redshift possiedano una distribuzione gaussiana, con le fluttuazioni quadratiche medie che aumentano col redshift secondo la formula:

$$\sigma(z) = \frac{\sigma_{max}(1+z)}{(1+z_{max})} = 0.02(1+z) \quad (3.36)$$

La funzione di selezione delle galassie, il cui significato è quello di descrivere la densità numerica di galassie osservate in ciascun intervallo di redshift, che entra nella 3.35, è ben approssimata dall'espressione [80]:

$$n_g^{tot}(z) = \frac{dN}{dz}(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+1}{\beta}\right)} \beta \frac{z^m}{z_0^{m+1}} \exp \left[- \left(\frac{z}{z_0} \right)^\beta \right] \quad (3.37)$$

dove z_0 è un parametro atto a riprodurre il redshift mediano atteso z_{med} della distribuzione del campione di galassie (che indica quanto lontani sono gli oggetti osservati e quindi la profondità della survey), ponendo $z_0 = z_{med}/1.41$, mentre α e β sono dei parametri che regolano la forma della distribuzione,

generalmente si sceglie $\alpha = 2$ e $\beta = 3/2$. E dove Γ rappresenta una funzione Gamma³. Nella pratica non è sufficiente fissare i parametri α e β con l'esperimento, si deve invece campionare completamente la forma della funzione. Per un dato bin fotometrico, la funzione di selezione normalizzata è quindi data da [78]:

$$W_g^i(z) = \frac{n_g^i(z)}{\bar{N}_i} \quad (3.38)$$

dove \bar{N}_i è la normalizzazione definita come l'integrale della funzione di selezione sull'intervallo di redshift [107]:

$$\bar{N}_i = \int_{z_{min}}^{z_{max}} n_g^i(z) dz \quad (3.39)$$

Nel nostro calcolo prendiamo come distribuzione di galassie quella che verrà dal telescopio LSST, le cui caratteristiche tecniche e della survey vedremo nel paragrafo 3.7.1.

3.6 Il programma CMBCROSSFAST

Per generare gli spettri di potenza della temperatura della CMB, della polarizzazione, ed anche gli spettri della cross-correlazione temperatura-materia e materia-materia utilizziamo una versione modificata del programma CMBFAST [97]. Il programma, scritto in linguaggio fortran 77, riceve in ingresso i valori dei parametri cosmologici scelti, può inoltre calcolare gli spettri per differenti modelli di energia oscura, costante o dipendente dal fattore di scala (e quindi dal tempo) includendone o meno le perturbazioni.

Sfruttando la base di CMBFAST che, separando il calcolo delle funzioni di Bessel interpolate su una griglia ponderata di punti, e quindi integrando sugli stessi il sistema di equazioni di Boltzmann, guadagna in questo modo un enorme tempo macchina che altrimenti sarebbe stato speso nell'integrazione. Il codice permette di scegliere tra più funzioni di selezione di galassie, quella delle galassie Luminous Red Galaxies [43, 49]; una funzione finestra standard, caratterizzata da parametri da inserire in input e la funzione di selezione del telescopio LSST.

Per i nostri scopi abbiamo selezionato la funzione di selezione di LSST; il programma calcola quindi la correlazione tra la funzione finestra selezionata e lo spettro di potenza della CMB che compare nell'output del programma

³Le funzioni Gamma sono definite come: $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ e godono delle proprietà $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ e $\Gamma(n+1) = n!$.

come file dati. In aggiunta l'output comprende anche la funzione di autocorrelazione della materia.

Il programma è stato ulteriormente modificato per poter inserire anche la possibilità di suddividere la funzione di selezione in bin di redshift, calcolando quindi una matrice, i cui elementi diagonali rappresentano l'autocorrelazione dei bin con loro stessi, mentre gli elementi fuori diagonale rappresentano tutte le cross-correlazioni tra i bin. Questa matrice ci sarà molto utile nel calcolo della matrice di Fisher per l'effetto ISW.

La forma caratteristica dello spettro di potenza dell'ISW, risultante dalla correlazione su descritta, è data appunto dalla forma della funzione finestra che taglia tutte le scale al di fuori dell'intervallo di redshift considerato, che generalmente è centrata ad un redshift minore di 1. Per LSST la funzione finestra mostrata in figura 3.12 è centrata ad un redshift di $z_{med} \approx 0.6$.

3.6.1 La configurazione migliore

Nella nostra analisi, che abbiamo portato avanti utilizzando la funzione di selezione delle galassie di LSST, ci siamo soffermati su una questione: individuare quale potesse essere la migliore configurazione possibile, con i dati in nostro possesso, tra il numero di bin in cui suddividere la distribuzione totale di galassie e la larghezza Δz dei bin stessi.

Data la forma della distribuzione di LSST ci siamo accorti che era difficile e potenzialmente problematico aumentare ad un numero più alto di 8 il totale dei bin.

I problemi sorgono perché, anche se sarebbe possibile usare un numero anche molto più grande di bin, si vede che più il numero aumenta, più questi si infittiscono nella coda della distribuzione totale, venendo quindi a sovrapporsi gli uni e gli altri, coprendo perciò le stesse zone di redshift e portando ad errori numerici.

Questo fa sì che nel calcolo della cross-correlazione tra lo spettro della temperatura CMB e la distribuzione di galassie, si riscontri un aumento degli errori sulla matrice di covarianza, che serve nel calcolo della matrice di Fisher, che useremo per dare dei limiti sui principali parametri cosmologici.

Perciò avendo come 8 il numero massimo possibile di bin, abbiamo considerato anche delle configurazioni che prevedessero un numero di bin pari a 7 e 6. Con un numero più basso di 6 bin è difficile coprire efficacemente tutto l'intervallo di redshift su cui si sviluppa la funzione di distribuzione.

Oltre al numero di bin, abbiamo fatto variare, per ciascuna configurazione, anche la larghezza dei bin, scegliendo come standard della larghezza tre

diversi valori: $\Delta z = 0.2$, $\Delta z = 0.4$, $\Delta z = 0.8$.

Usando il programma CMBCROSSFAST [68], il cui funzionamento è descritto nel paragrafo 3.6, procediamo calcolando tutte le possibili configurazioni, per numero e larghezza di bin, che in totale risultano 9.

Per giudicare quale sia la configurazione migliore, vediamo come cambiano gli errori sui parametri cosmologici ottenuti dal calcolo della matrice di Fisher; quando le sigma saranno le più basse in assoluto, allora quella sarà la configurazione, per numero di bin e loro larghezza, la più performante tra quelle considerate.

Abbiamo visto che per un numero di bin pari a 6 e 7 la configurazione

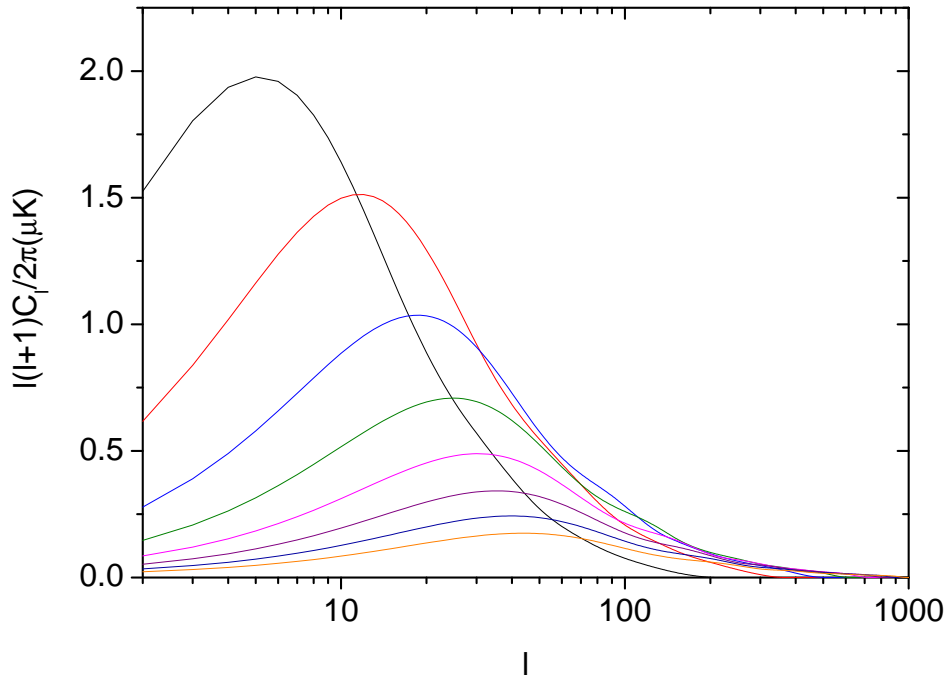


Figura 3.10: I contributi dei diversi bin allo spettro di potenza della cross-correlazione g_T , si vede che i primi bin, centrati a bassi redshift, sono quelli che più contribuiscono, intercettando la maggior parte del segnale, inoltre per redshift troppo grandi non c'era effetto ISW che infatti viene generato dal passaggio dalla dominazione della materia a quella dell'energia oscura.

migliore corrisponde ad un $\Delta z = 0.4$, mentre gli errori sui parametri cosmologici aumentano con i restanti due valori della larghezza dei bin. Ma la configurazione migliore in assoluto è quella che prevede una scelta di 8 bin

di larghezza $\Delta z = 0.2$. Come si poteva facilmente arguire, la funzione di distribuzione delle galassie funziona meglio quando è suddivisa nel maggior numero di bin possibile con la larghezza minore, in modo che la distribuzione sia campionata bene e non si verifichino, o almeno in piccola misura, delle sovrapposizioni tra bin che possano poi compromettere il risultato finale: la misura dei parametri cosmologici.

Nella figura 3.10 è riportato il contributo che gli 8 bin considerati portano allo spettro di potenza della cross-correlazione fra temperatura e galassie. Come si vede sono i primi bin, soprattutto i primi tre, quelli che più influenzano la forma dello spettro, essendo quelli centrati a redshift più basso ed anche quelli che hanno un numero medio maggiore di galassie per pixel, poiché ricevono un segnale maggiore, esplorando zone più vicine a noi nel tempo e nello spazio, e di conseguenza più facilmente rivelabile.

Osserviamo inoltre che, per i bin centrati a redshift più alti i rispettivi picchi si spostano verso multipoli superiori e contemporaneamente lo spettro di cross-correlazione diminuisce in ampiezza. Il primo bin ha un picco per $l \approx 5$, mentre l'ultimo ha un picco per $l \approx 50$.

Inoltre, la diminuzione del segnale per redshift alti [51], è causata dal fatto che non era ancora iniziato l'effetto ISW che, infatti, viene generato dal passaggio dalla dominazione della materia a quella dell'energia oscura, che avviene a bassi redshift. Inoltre le galassie, indispensabili per la cross-correlazione, hanno cominciato a formarsi per $z \simeq 4$.

Lo spostamento lungo l'asse dei multipoli si spiega, invece, con l'espansione delle dimensioni dell'universo. Questa provoca lo spostamento verso i multipoli minori, in quanto corrispondono a distanze angolari maggiori tra le galassie.

3.7 Set di dati utilizzati

Nel programma CMBCROSSFAST che abbiamo utilizzato per generare gli spettri dell'effetto ISW utilizza la funzione finestra del telescopio LSST, mentre nel programma che calcola la matrice di Fisher possiamo inserire i dati dei due esperimenti satellitari WMAP e Planck.

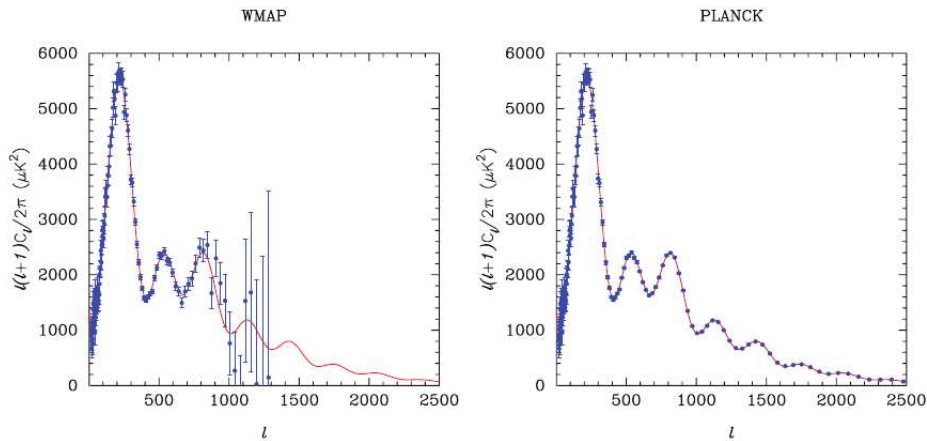


Figura 3.11: Confronto sui vincoli posti da WMAP sullo spettro di potenza della CMB tra WMAP e le future misure di Planck [34].

3.7.1 LSST

il Large Synoptic Survey Telescope [69] è un telescopio a Terra che produrrà una mappa di un campione largo e profondo di sorgenti astronomiche su oltre 20000 gradi quadrati nel cielo sud, su 6 bande tra 0.3 e 1.1 μm . Il disegno di LSST è l'unico tra i grandi telescopi ad avere un campo di vista di $3^\circ.5$ in diametro corrispondente a 9.6 gradi quadrati.

Per raggiungere un così buon risultato, senza eventuali distorsioni, il telescopio è composto di 3 specchi e non 2 come in molti altri telescopi. Lo specchio primario avrà un diametro di 8.4 m, lo specchio secondario avrà un diametro di 3.4 m e il terzo, collocato in un buco abbastanza largo del primario, sarà di 5 m. Il foro nel primario riduce l'area su cui può incidere la luce, perciò è come se lo specchio avesse un diametro di 6.68 m. La camera da 3200 Megapixel, che sarà la fotocamera digitale più grande del mondo, scatterà oltre 200000 (1.28 petabytes di dati) foto per anno.

I dati provenienti da LSST avranno una precisione superiore centinaia di volte rispetto ai suoi precursori. L'accuratezza nel misurare la presenza di

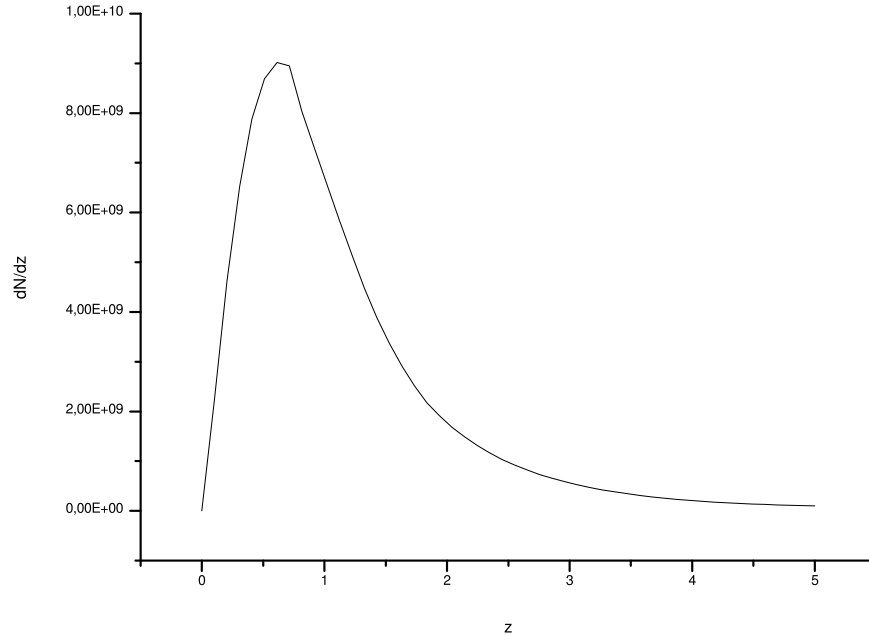


Figura 3.12: La funzione finestra per LSST usata nel programma CMB-CROSSFAST.

energia oscura e materia oscura nell'universo, deriva dal fatto che il telescopio osserverà un campione di miliardi di galassie e milioni di supernove. I redshift fotometrici avranno un'accuratezza dell'1-2% o minore. La funzione finestra per LSST (figura 3.12), interamente campionata, che useremo per portare avanti i calcoli della cross-correlazione tra lo spettro di potenza delle anisotropie della CMB, è definita su un intervallo di redshift $0 < z < 5$, con un picco a $z_{med} \approx 0.6$. Consideriamo inoltre una frazione di cielo coperta pari a $f_{sky} = 0.5$, con un numero totale di galassie per arcmin² pari a 80 gal/arcmin².

3.7.2 WMAP

Lo scopo primario del progetto WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [66], messo in orbita il 30 giugno 2001, è la misurazione delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo. Per questo, WMAP (figura 3.13) ha creato una mappa completa della temperatura della CMB, dopo aver trasformato in pixel la sfera celeste [38], con una risoluzione di 13 arcmin, tramite una osservazione multi frequenza.

WMAP è uno strumento differenziale che misura le differenze di temperatura tra due punti distinti del cielo, tutto grazie a ricevitori costituiti da dei radiometri per le microonde, raffreddati, che lavorano su 5 frequenze da 23 GHz a 94 GHz, permettendo così di eliminare varie radiazioni che possono contaminare la CMB (provenienti dalla Via Lattea o da altre fonti extra galattiche).

I meccanismi principali di emissione sono radiazione di sincrotrone e Brems-

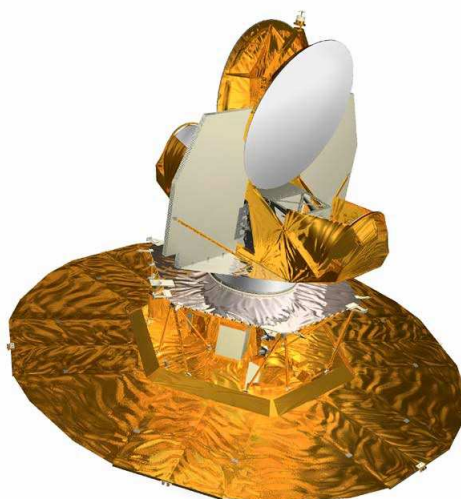


Figura 3.13: Un'immagine del satellite WMAP

strahlung (detta anche emissione free-free), le quali predominano alle frequenze più basse, mentre alle frequenze più alte la principale fonte di emissione sono le polveri interstellari. Le proprietà spettrali di queste emissioni danno un contributo diverso nelle cinque frequenze analizzate, permettendo così la loro identificazione e successiva eliminazione.

Il posizionamento del satellite è al secondo punto lagrangiano, a un milione e mezzo di Km circa dalla Terra, minimizzando in questo modo l'interferenza proveniente dal Sole, dalla Terra e dalla Luna, permettendo anche una stabilità termica degli strumenti. Il satellite ha un periodo orbitale di 6 mesi, durante il quale compie un'intera analisi del cielo.

Ad ora le misure più accurate delle fluttuazioni di temperatura della radiazione cosmica di fondo, provengono proprio dal satellite WMAP. Per i nostri calcoli abbiamo preso le misure dopo 3 anni di osservazione: WMAP3, mentre per i valori dei parametri cosmologici riportati nel paragrafo 1.8.1 abbiamo preso i valori di WMAP5, che sono le ultime misure dopo 5 anni di

osservazioni.

3.7.3 Planck

Planck [67] è una missione spaziale per la misura delle anisotropie della CMB, che segue COBE e WMAP. Rispetto ai primi due strumenti, implementa una serie di importanti migliorie per aumentare la risoluzione angolare e la sensibilità, e nello stesso tempo controllare strettamente gli errori sistematici.

Il satellite Planck, una cui immagine è mostrata nella figura 3.14, è stato lanciato con successo lo scorso 14 Maggio, dopo quattro mesi di viaggio raggiungerà il secondo punto lagrangiano a circa 1,5 milioni di chilometri dalla Terra, in posizione opposta rispetto a quella del Sole. La Terra e la Luna faranno così da schermo al satellite dall'interferenza della radiazione solare.

A bordo del satellite sono presenti diversi strumenti, uno di questi è il Low

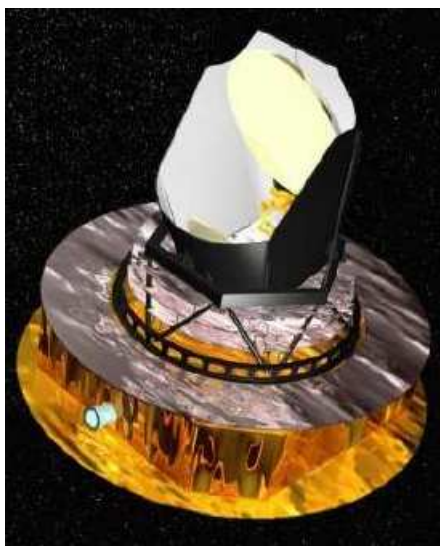


Figura 3.14: Un'immagine del satellite Planck.

Frequency Instrument: un array di 22 radiometri, centrati su canali di frequenze a 30.44 GHz e 70 GHz, che misurano il segnale proveniente dal cielo (attraverso il telescopio) confrontandolo, con una tecnica differenziale, con un carico termico, dalle caratteristiche di corpo nero, alla temperatura di circa 4.5 K (una tecnica usata anche in WMAP, dove però non si confronta il segnale del cielo con un carico termico installato a bordo, bensì si confronta la temperatura del cielo in due direzioni diverse). I 22 radiometri, raffreddati ad una temperatura inferiore rispetto a quelli installati su WMAP, il che

permetterà di ridurre l'impatto del rumore sul segnale misurato, sono suddivisi in coppie collegate alla medesima antenna, dove ognuno dei radiometri misura una componente polarizzata: in questo modo è possibile studiare non solo le anisotropie di temperatura della CMB, ma anche le anisotropie della polarizzazione.

Ogni radiometro installato, nella sua banda, può valutare la disomogeneità della CMB. Un altro strumento installato è l'High Frequency Instrument: un array di rivelatori che lavorano nello spettro di frequenza tra 100 e 850 GHz. Alcuni dei bolometri di HFI, quelli del canale a 100 GHz, sono anche in grado di misurare le anisotropie della polarizzazione della CMB.

L'antenna del telescopio è composta da uno specchio primario parabolico e da uno specchio secondario a forma di ellissoide. Quest'ultimo ha la funzione di focalizzare la radiazione ricevuta sugli strumenti di misura predisposti per effettuare le misure. Il satellite Planck ha una risoluzione angolare di $7'$, e comporrà delle mappe a tutto cielo delle anisotropie della CMB. Questo permetterà di migliorare sensibilmente le misure dello spettro della radiazione cosmica di fondo.

Capitolo 4

Analisi dei dati e risultati

In questo capitolo presentiamo i risultati, da noi ottenuti, del calcolo della cross-correlazione tra lo spettro delle anisotropie di temperatura e la survey di galassie LSST. Per cominciare presentiamo il formalismo che sta alla base dell'analisi dati che abbiamo effettuato: la funzione di verosimiglianza, arrivando poi a definire la matrice di Fisher, con la quale possiamo fornire dei vincoli, più o meno stringenti, ai parametri cosmologici del modello teorico scelto per descrivere l'universo. Per l'analisi abbiamo selezionato due set di dati: quelli provenienti dal satellite WMAP e quelli simulati che potranno venire dal satellite, appena lanciato, Planck. In particolare, tra i parametri cosmologici presi in esame, ci concentreremo sui vincoli da porre ai parametri dell'energia oscura.

4.1 Il formalismo per l'analisi dei dati

L'incredibile ammontare di dati, per quantità e qualità, che si è avuto negli ultimi anni, e le missioni previste (come Planck) hanno posto la questione fondamentale di come analizzare tutto questo materiale.

Il fine ultimo di queste analisi consiste nel porre dei vincoli sui parametri cosmologici, attraverso un modello teorico che deve essere confrontato poi con le osservazioni disponibili.

Ci concentreremo [22] in particolare sulla derivazione della matrice di Fisher, che useremo come metodo di analisi per vincolare alcuni parametri cosmologici di nostro interesse come quelli relativi all'energia oscura, e quelli riguardanti il numero di specie di neutrino ed il loro contributo alla densità d'energia dell'universo.

Si definisce la *funzione di massima verosimiglianza*, o *likelihood function*,

la probabilità di ottenere un particolare dato sperimentale, dato un modello teorico descritto da una serie di parametri. Una volta costruita questa funzione, possiamo determinare i valori dei parametri (la cui miglior stima si ha nel punto dello spazio dei parametri dove la funzione ha un massimo) della teoria anche con gli errori (definiti dalla larghezza della funzione).

Consideriamo il valore w della grandezza da cui dipende il modello teorico, con relativa *deviazione standard* σ_w . Assumiamo che l'errore associato alla misura di w abbia una distribuzione gaussiana con valore atteso nullo e varianza σ_w^2 . Dunque, in questa approssimazione, si hanno due parametri liberi: w e σ_w . Se abbiamo a disposizione solo un punto sperimentale d , la probabilità di ottenere d data la teoria è:

$$P[d|w, \sigma_w] \equiv \mathcal{L}(d; w, \sigma_w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left\{-\frac{(d-w)^2}{2\sigma_w^2}\right\} \quad (4.1)$$

Qui $P[x|y]$ rappresenta la probabilità di x dato y . L'equazione 4.1 semplicemente riafferma l'assunzione che $(d-w)$ è uguale al rumore e che il rumore ha una distribuzione gaussiana con deviazione standard σ_w . Nel limite in cui σ_w diventa piccola, la funzione ha un picco per $d = w$. Se, invece, eseguiamo N_m misure indipendenti, con i dati descritti da un vettore $d = \{d_i\}$, la likelihood è il prodotto di tutte le singole funzioni:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{N_m/2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{N_m} (d_i - w)^2}{2\sigma_w^2}\right\} \quad (4.2)$$

Notiamo che, anche se i dati sono distribuiti gaussianamente, la likelihood non è necessariamente gaussiana per tutti i parametri: lo è per w ma non per σ_w . Noi siamo interessati ai parametri w e σ_w , dunque non ci serve la $P[d|w, \sigma_w]$, ma $P[w, \sigma_w|d]$. Per ottenere quest'ultima probabilità dalla precedente, usiamo una semplice relazione della teoria elementare delle probabilità: il *teorema di Bayes*:

$$P[B \cap A] = P[B|A]P[A] = P[A|B]P[B] \quad (4.3)$$

Nel nostro caso $A = \{d_i\}$ e $B = \{w, \sigma_w\}$. L'uguaglianza 4.3 porta alla relazione:

$$P[w, \sigma_w|d_i] = \frac{P[d_i|w, \sigma_w]P[w, \sigma_w]}{P[d_i]} \quad (4.4)$$

Il cui denominatore può essere riscritto considerando che l'integrale della probabilità $P[w, \sigma_w|d]$ su tutti i valori dei parametri w e σ_w deve essere normalizzato a 1. Da ciò risulta che il denominatore non dipende dai parametri w e σ_w , perciò non influenza il punto dello spazio dei parametri in cui la

likelihood picca, né la sua larghezza. Per avere la probabilità che ci interessa abbiamo bisogno della likelihood e della probabilità *a priori* $P[w, \sigma_w]$, che ci da le informazioni sui parametri cosmologici prima delle osservazioni. In pratica il significato della 4.4 è che le probabilità a priori possono essere migliorate con i dati sperimentali, praticamente moltiplicando per la likelihood. Si ottiene così una probabilità che ci serve per scoprire il valore più probabile dei parametri.

La distribuzione di probabilità che si ha per ogni parametro, o per un sottoinsieme di parametri, la otteniamo marginalizzando, cioè integrando su questi parametri la likelihood moltiplicata per la distribuzione di probabilità a priori, sui parametri rimanenti. Da questa ricaviamo i livelli di confidenza, di solito al 68% ed al 95% rispetto al punto di massimo della likelihood. Lo spazio compreso entro questi livelli indica solo la regione nello spazio dei parametri che in media è in miglior accordo con i dati. Punti che sono esclusi dagli intervalli di confidenza potrebbero rientrarvi se si cambia il modello di riferimento, per cui l'approccio bayesiano è assai dipendente dal modello teorico scelto.

Possiamo trovare i valori di best-fit di w e σ_w , ricavando i punti in cui la likelihood ha un massimo. Analiticamente, differenziando la funzione di massima verosimiglianza \mathcal{L} rispetto ad ogni parametro, si ha un massimo per:

$$w = \bar{w} = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} d_i \quad (4.5)$$

$$\sigma_w^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_m} (d_i - w)^2}{N_m} \quad (4.6)$$

che sono le espressioni del valore aspettato e della varianza per una distribuzione gaussiana, come ci aspettavamo. Gli errori sono invece proporzionali alla larghezza della likelihood. Un modo semplice per approssimare la larghezza è assumere che \mathcal{L} sia gaussiana nei parametri, o equivalentemente che $\ln \mathcal{L}$ sia quadratico nei parametri. Per w :

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(w) &= \ln \mathcal{L}(\bar{w}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial w^2} \Big|_{w=\bar{w}} (w - \bar{w})^2 \\ &= \ln \mathcal{L}(\bar{w}) - \frac{N_m}{2\sigma_w^2} (w - \bar{w})^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

In generale la varianza di una distribuzione gaussiana è il doppio dell'inverso del coefficiente del termine quadratico. Dunque la larghezza della likelihood al suo massimo è $\sigma_w/N_m^{1/2}$, che rappresenta l'errore a una sigma nella determinazione di w . Com'è ovvio, più misure indipendenti si hanno più l'errore

si riduce, come l'inverso della radice del numero di misure.

Tutte le N_m misure possono essere comprese in sole due riscrivendo la funzione di massima verosimiglianza come:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi C_N}} \exp \left\{ \frac{-(w - \bar{w})^2}{2C_N} \right\} \quad (4.8)$$

dove la varianza dovuta al rumore, ora è: $C_N = \sigma_w^2/N_m$. Quindi tutte le informazioni insite nella likelihood sono raggruppate in soli due numeri: \bar{w} e C_N .

4.1.1 La funzione di verosimiglianza della CMB

Applichiamo ora quello che abbiamo visto fin qui alla CMB. il parametro w è sostituito dal segnale vero s dell'anisotropia della temperatura in un dato punto del cielo, mentre \bar{w} è sostituito da Δ , che rappresenta il valore stimato dell'anisotropia di temperatura mentre la varianza è C_N . Le teorie più semplici, come l'inflazione, predicono che il segnale della CMB sia rappresentato da una distribuzione gaussiana, così la probabilità che la temperatura del cielo cada in un intervallo $(s, s + ds)$ è:

$$P(s)ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi C_S}} \exp \left\{ \frac{-s^2}{2C_S} \right\} ds \quad (4.9)$$

dove C_S è la varianza aspettata dovuta al solo segnale, indipendente quindi da qualsiasi rumore. Per ottenere la funzione di massima verosimiglianza dobbiamo convolvere questa espressione con la 4.8. Schematicamente:

$$P[\Delta|C_S] = \sum_s P[\Delta|s]P[s|C_S] \quad (4.10)$$

Più concretamente, la likelihood è un integrale su tutti i possibili valori dell'anisotropia reale:

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{2\pi C_S}} \exp \left\{ \frac{-s^2}{2C_S} \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi C_N}} \exp \left\{ \frac{-(\Delta - s)^2}{2C_N} \right\} \quad (4.11)$$

Gli argomenti degli esponenziali sono quadratici in s , dunque possono essere portati fuori dall'integrazione; poi con un cambio di variabile ed integrando arriviamo a scrivere l'espressione della likelihood per un esperimento con un solo pixel:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi C}} \exp \left\{ \frac{-\Delta^2}{2C} \right\} \quad (4.12)$$

dove $C = C_S + C_N$ è la *matrice di covarianza* totale. Questa è l'espressione finale della likelihood per un esperimento dotato di un solo pixel; ed è proprio quella che ci si aspetta: la temperatura misurata dovrebbe essere distribuita come una gaussiana con una varianza data dalla somma delle varianze dovute al segnale ed al rumore.

Per un esperimento più realistico, con N_p pixel, la funzione di massima verosimiglianza diventa:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{(2\pi)^{N_p/2} \sqrt{\det C}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta C^{-1} \Delta \right\} \quad (4.13)$$

dove Δ è un vettore di dati contenente tutte le N_p misure.

In generale, la matrice di covarianza del rumore è spesso diagonale, ma quella teorica non lo è. Quindi la parte più difficile nel valutare la likelihood consiste nel calcolo del determinante e dell'inversa della matrice C che è una matrice $N_p \times N_p$.

4.2 La matrice di Fisher

Per calcolare il punto in cui la funzione di verosimiglianza ha un massimo basta annullare la sua derivata prima:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\bar{\lambda}} = 0 \quad (4.14)$$

dove, per semplicità, abbiamo assunto che la likelihood dipenda da un solo parametro λ , con $\bar{\lambda}$ che è il rispettivo valore al punto di massimo della funzione. Per andare avanti espandiamo in serie di Taylor la derivata prima intorno ad un dato punto $\lambda = \lambda^{(0)}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\bar{\lambda}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\lambda^{(0)}) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial \lambda}(\bar{\lambda} - \lambda^{(0)}) + \dots \quad (4.15)$$

Se \mathcal{L} è massima a $\bar{\lambda}$, la sua derivata si annulla in quel punto; ma anche la seconda parte dell'equazione 4.15 si può annullare. Se ciò avviene, possiamo ricavare una semplice espressione per $\bar{\lambda}$:¹

$$\bar{\lambda} \simeq \lambda^{(0)} - \frac{\mathcal{L}_{,\lambda}(\lambda^{(0)})}{\mathcal{L}_{,\lambda\lambda}(\lambda^{(0)})} \quad (4.16)$$

¹Da qui in avanti scriveremo le derivate parziali come virgole al pedice. per la derivata prima: $\mathcal{L}_{,\lambda} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$ e per la derivata seconda: $\mathcal{L}_{,\lambda\lambda} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial \lambda}$.

Nell'equazione precedente si assume che la likelihood sia una funzione quadratica nel parametro λ . Purtroppo così non è: lontano dal massimo, \mathcal{L} diminuisce con andamento esponenziale. Un'approssimazione migliore sta nel considerare \mathcal{L} una funzione gaussiana, cosicché è il $\ln(\mathcal{L})$ quadratico in λ . Ripetendo quindi il procedimento mostrato, l'estimatore per λ è:

$$\hat{\lambda} = \lambda^{(0)} - \frac{\ln \mathcal{L}_{,\lambda}(\lambda^{(0)})}{\ln \mathcal{L}_{,\lambda\lambda}(\lambda^{(0)})} \quad (4.17)$$

Per trovare una stima del best-fit per λ , dobbiamo calcolare le derivate della 4.17. Nel caso della CMB la likelihood \mathcal{L} è data dalla 4.13. Perciò cercheremo di differenziare il logaritmo naturale dell'equazione 4.17. Qui la matrice di covarianza C dipende dal parametro λ . Usando l'identità $\ln(\det C) = \text{Tr}(\ln C)$ e la proprietà $C_{,\lambda}^{-1} = -C^{-1}C_{,\lambda}C^{-1}$ otteniamo, per la derivata prima:

$$2 \ln \mathcal{L}_{,\lambda} = \Delta C^{-1} C_{,\lambda} C^{-1} \Delta - \text{Tr}[C^{-1} C_{,\lambda}] \quad (4.18)$$

Per la derivata seconda invece:

$$\begin{aligned} 2 \ln \mathcal{L}_{,\lambda\lambda} &= -2 \Delta C^{-1} C_{,\lambda} C^{-1} C_{,\lambda} C^{-1} \Delta + \text{Tr}[C^{-1} C_{,\lambda} C^{-1} C_{,\lambda}] \\ &+ (\Delta C^{-1} C_{,\lambda\lambda} C^{-1} \Delta - \text{Tr}[C^{-1} C_{,\lambda\lambda}]) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Definisco la *curvatura* della likelihood:

$$\mathcal{F} \equiv -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} = -\ln \mathcal{L}_{,\lambda\lambda} \quad (4.20)$$

che quando è calcolata al massimo, misura quanto ripidamente la likelihood varia discendendo dal punto di massimo. Se la curvatura è piccola, allora la funzione cambia lentamente e i dati non forniscono buoni vincoli sui parametri, mentre, se la curvatura è grande, ciò si traduce in più piccoli errori sui parametri. Prendendo ora il rapporto tra la 4.18 e la 4.19, e con alcune approssimazioni, arriviamo a scrivere:

$$\hat{\lambda} = \lambda^{(0)} + F_{\lambda\lambda}^{-1} \frac{\Delta C^{-1} C_{,\lambda} C^{-1} \Delta - \text{Tr}[C^{-1} C_{,\lambda}]}{2} \quad (4.21)$$

dove $F_{\lambda\lambda} \equiv \langle \mathcal{F} \rangle$ è la media della curvatura su molte realizzazioni di segnale e rumore, entrambe assunte con distribuzioni gaussiane. La 4.21 rappresenta l'estimatore del valore del parametro λ che massimizza la funzione di verosimiglianza e può essere facilmente generalizzata al caso di molti parametri $\lambda_\alpha = \lambda_1, \lambda_2, \dots$ che sono liberi di variare:

$$\hat{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha^{(0)} + F_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\Delta C^{-1} C_{,\beta} C^{-1} \Delta - \text{Tr}[C^{-1} C_{,\beta}]}{2} \quad (4.22)$$

dove compare la *matrice di Fisher*, definita come:

$$F_{\alpha\beta} \equiv \left\langle -\frac{\partial^2(\ln \mathcal{L})}{\partial\lambda_\alpha\partial\lambda_\beta} \right\rangle = \frac{1}{2}\text{Tr}[C_{,\alpha}C^{-1}C_{,\beta}C^{-1}] \quad (4.23)$$

Possiamo ora cercare i valori dei parametri che massimizzano la likelihood, però dobbiamo ancora trovare un modo di stimare gli errori sui parametri. Una volta valutata \mathcal{L} ovunque, possiamo già identificare una zona nello spazio dei parametri esclusa al 95%. Se le distribuzioni di segnale e rumore, assunte gaussiane con matrici di covarianza C_s e C_N sono note, possiamo calcolare i valori di aspettazione del set di parametri: $\langle \hat{\lambda}_\alpha \rangle = \bar{\lambda}_\alpha$, che risultano uguali ai valori veri dei parametri $\bar{\lambda}_\alpha$. Siamo anche interessati alla varianza dell'estimatore 4.22:

$$\langle (\hat{\lambda}_\alpha - \bar{\lambda}_\alpha)(\hat{\lambda}_\beta - \bar{\lambda}_\beta) \rangle = (F^{-1})_{\alpha\beta} \quad (4.24)$$

Questa uguaglianza vale solo al massimo della likelihood e se i dati sono distribuiti in maniera gaussiana. Se valgono queste condizioni, allora gli errori attesi sui parametri sono uguali alla radice quadrata degli elementi diagonali F^{-1} . Esiste un teorema detto di *Cramer-Rao* che attesta che nessun metodo può misurare i parametri con errori più piccoli di questi. Questo ha senso se gli errori non possono essere minori della larghezza della likelihood. Larghezza che è determinata dalla curvatura, e la matrice di Fisher non è altro che la media d'insieme della stessa curvatura. La relazione 4.24 è utile perché, come si vede dalla 4.23, la matrice di Fisher, e quindi gli errori aspettati su qualsivoglia set di parametri, può essere valutata senza disporre di alcun dato. Con la derivazione che abbiamo fatto assumiamo che la likelihood sia gaussiana, vero per la CMB, ma non per un dato campione di galassie. Tuttavia l'estimatore 4.22 può essere applicato ad una survey di galassie, anche senza questa assunzione.

4.2.1 La matrice di Fisher per la CMB

La matrice di Fisher [82, 101, 22] gioca un ruolo chiave nel descrivere la capacità di un dato esperimento di poter vincolare alcuni parametri. Nel caso di copertura completa del cielo, la matrice può essere calcolata analiticamente. Questa computazione può essere estesa al caso maggiormente realistico di copertura parziale del cielo. L'uso più frequente della matrice di Fisher consiste nel fare delle previsioni (forecasts) di quanto degli esperimenti possano dare dei vincoli stringenti sui parametri cosmologici.

La traccia nell'equazione 4.23 è una somma degli elementi diagonali della matrice $[C_{,\alpha}C^{-1}C_{,\beta}C^{-1}]_{ij}$, dove i, j indicano i pixel in cui è suddivisa la mappa

di cielo. Scegliamo inoltre come parametri liberi d'interesse i C_l , e ci chiediamo quanto bene possa un esperimento determinarli. Per tradurre in pixel la mappa usiamo, nel caso della CMB, i coefficienti a_{lm} , definiti dalla 2.49, al posto delle fluttuazioni di temperatura $\Theta(\hat{n})$. In questo modo ogni pixel è definito da l e m , dunque una data riga o colonna della matrice di covarianza corrisponde ad un valore fissato di l e m . Usualmente la matrice di covarianza è la somma delle matrici del segnale e del rumore. Dall'equazione 2.52 la matrice di covarianza del segnale sarà $\delta_{ll'}\delta_{mm'}C_l$. Assumiamo che l'esperimento misuri l'anisotropia con una taglia σ del beam. Dunque la matrice di covarianza del segnale viene moltiplicata per $e^{-l^2\sigma^2}$. La matrice di covarianza del rumore, nel caso di un rumore uniforme e scorrelato, è $\delta_{ll'}\delta_{mm'}(\theta_p\sigma_n^2)^{-1}$ con θ_p dimensione in radianti del pixel e σ_n rumore per pixel. Mettendo tutto insieme otteniamo la matrice di covarianza:

$$C_{lm;l'm'} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}[C_l e^{-l^2\sigma^2} + (\theta_p\sigma_n^2)^{-1}] \quad (4.25)$$

Calcolando anche l'inverso, e derivando rispetto ai parametri, si può costruire la matrice di Fisher. Tenendo conto di tutti gli indici e risolvendo, nel limite di copertura completa del cielo si ha:

$$F_{ll'} = \frac{2l+1}{2}\delta_{ll'}e^{-2l^2\sigma^2}[C_l e^{-l^2\sigma^2} + (\theta_p\sigma_n^2)^{-1}]^{-2} \quad (4.26)$$

Dunque per una survey a tutto cielo la matrice di Fisher per i C_l è diagonale. Tuttavia non esistono esperimenti capaci di coprire tutto il cielo, persino Planck ne coprirà una parte $f_{sky} < 1$. Gli errori sono uguali a $\sqrt{F^{-1}}$, perciò:

$$\delta C_l = \sqrt{\frac{2}{(2l+1)f_{sky}}[C_l + e^{l^2\sigma^2}(\theta_p\sigma_n^2)^{-1}]} \quad (4.27)$$

Ci sono dunque due fonti d'errore: la varianza cosmica 2.56, proporzionale allo stesso segnale C_l , ed il rumore, strumentale o atmosferico, compreso nel secondo addendo sulla destra dell'equazione 4.27. Il fattore $(2l+1)$, che deriva dalla somma su tutti gli m , rappresenta il numero di misure indipendenti usate per determinare un dato C_l . L'altra fonte di errore che è stata or ora aggiunta è la copertura del cielo.

Un esempio di esperimento

Consideriamo un esperimento CMB con le seguenti assunzioni:

- Un set di C_l descrittivi il vero universo;

- L'incertezza su C_l : δC_l dato dalla 4.27;
- Il set di parametri cosmologici $\{\lambda_\alpha\}$ per cui vogliamo delle previsioni.

I \hat{C}_l osservati sono prossimi a quelli reali C_l quando il χ^2 definito come

$$\chi^2(\lambda_\alpha) = \sum_l \frac{(C_l(\lambda_\alpha) - \hat{C}_l)^2}{(\delta C_l)^2} \quad (4.28)$$

raggiunge un minimo nel punto dello spazio dei parametri dove $\lambda_\alpha = \bar{\lambda}_\alpha$, valore attuale dei parametri. Valori che possiamo non conoscere, ma è lecito domandarsi quanto rapidamente cambia il χ^2 quando λ_α si allontana da $\bar{\lambda}_\alpha$. Se aumenta velocemente, allora gli errori sui parametri saranno piccoli, al contrario avremo degli errori grandi.

Per quantificare ciò, possiamo espandere χ^2 intorno al suo minimo $\bar{\lambda}_\alpha$. Per ora limitiamoci al caso di un solo parametro, poi generalizzeremo al caso di più parametri. Scriviamo:

$$\chi^2(\lambda) = \chi^2(\bar{\lambda}) + \mathcal{F}(\lambda - \bar{\lambda})^2 \quad (4.29)$$

Il termine lineare si annulla al minimo, mentre il coefficiente del termine quadratico: la curvatura, misura quanto rapidamente il χ^2 varia. L'errore sul parametro λ è $F^{-1/2}$. Da notare che \mathcal{F} rappresenta la curvatura della likelihood solo se gli errori dei C_l seguono una distribuzione gaussiana. Anche se non è vero, questa rappresenta comunque una buona approssimazione. Generalmente si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}} = \sum_l \frac{1}{(\delta C_l)^2} \left[\left(\frac{\partial C_l}{\partial \lambda} \right)^2 + (C_l - \hat{C}_l) \frac{\partial^2 C_l}{\partial \lambda^2} \right] \\ &\rightarrow \sum_l \frac{1}{(\delta C_l)^2} \frac{\partial C_l}{\partial \lambda} \frac{\partial C_l}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Tradizionalmente il secondo termine della somma può essere trascurato. Infatti la differenza $(C_l - \hat{C}_l)$ qualche volta è negativa, qualche altra positiva, in media nulla. Quest'ultima espressione è facilmente generalizzabile al caso di più parametri:

$$F_{\alpha\beta} = \sum_l \frac{1}{(\delta C_l)^2} \frac{\partial C_l}{\partial \lambda_\alpha} \frac{\partial C_l}{\partial \lambda_\beta} \quad (4.31)$$

Che è la matrice di Fisher. Per sapere con quanta accuratezza possono essere conosciuti i parametri, basta conoscere le specifiche sperimentali per δC_l e le derivate dei C_l intorno al loro assunto valore vero. Vedremo questo nel dettaglio nei paragrafi 4.4.1 e 4.4.2.

4.3 Il modello teorico fiduciale

Usiamo la matrice di Fisher per dare una previsione di stima dei parametri cosmologici e provare il potenziale del metodo di cross-correlazione dello spettro delle anisotropie di temperatura della CMB con delle survey di galassie. Assumiamo che l'universo, piatto, evolva da condizioni iniziali adiabatiche con uno spettro delle fluttuazioni di densità invariante di scala. Non consideriamo, invece, componenti tensoriali, mentre assumiamo che esistano tre specie di neutrini massivi [76].

Il nostro spazio di parametri λ_α include: le frazioni di densità d'energia della materia totale $\Omega_m h^2$, della parte di materia barionica $\Omega_b h^2$, dei neutrini $\Omega_\nu h^2$; i parametri dell'energia oscura per due differenti modelli: $w_0 = \text{cost}$ e (w_0, w_a) nel caso di dipendenza dei parametri dal fattore di scala, il logaritmo in base 10 della velocità del suono nell'energia oscura $\log_{10} c_s^2$; la profondità ottica alla reionizzazione τ ; il numero di neutrini massivi $N_\nu(m \neq 0)$ e di quelli relativistici (a massa nulla) $N_\nu(m = 0)$; la costante di Hubble H_0 ; l'indice spettrale scalare n_s e l'ampiezza dello spettro di potenza iniziale A_s . In totale abbiamo 11 parametri considerando il modello d'energia oscura costante, e 12 parametri con il modello d'energia oscura dipendente dal tempo. I valori fiduciali dei parametri cosmologici selezionati sono [74, 65]:

Parametro	Valore fiduciale
H_0	71.9
$\Omega_b h^2$	0.027
$\Omega_m h^2$	0.16
w_0	-0.95
$\log_{10} c_s^2$	0
$\Omega_\nu h^2$	0.016
n_s	0.963
$N_\nu(m \neq 0)$	3
$N_\nu(m = 0)$	0.04
τ	0.08
A_s	1
w_a	0

Tabella 4.1: Valori fiduciali dei parametri cosmologici usati nell'analisi dati.

Qui i parametri sono riportati nell'ordine col quale sono inseriti nel programma che abbiamo elaborato per calcolare la matrice di Fisher, ivi compreso il calcolo della matrice di covarianza, per l'ISW e per la CMB, che rappresenta la parte più complessa, anche dal punto di vista computazionale, del programma e quindi del calcolo.

4.3.1 Modelli di energia oscura

Molti sono i modelli di energia oscura che sono stati proposti: costante cosmologica (Λ), quintessenza [98, 60], etc.

Grazie all'effetto Sachs-Wolfe integrato, ed alla sua cross-correlazione con la materia, si possono dare dei buoni vincoli sui parametri dell'energia oscura [23, 70, 59, 36, 26, 35]. Nella nostra analisi prendiamo in esame due diversi modelli di energia oscura: uno costante nel tempo, ed un altro che dipende dal tempo attraverso il fattore di scala.

Per avere un $w_0 \neq -1$, consideriamo che siano presenti delle perturbazioni nell'energia oscura. Perciò inseriamo come parametro, come mostrato nella lista di parametri precedente, un $w_0 = -0.95$, se w_0 fosse uguale a -1 avremmo il caso di costante cosmologica [94]. Quindi il primo modello di energia oscura che consideriamo consiste in un'equazione di stato costante:

$$w_0 = \text{cost} \quad (4.32)$$

L'altro modello cerca di parametrizzare w in modo che possa dipendere dal tempo, alleviando così il problema del *why now?* che affligge i modelli con energia oscura costante [96]. In modo da poter regolare due parametri.

Uno dei modelli a due parametri più in voga è basato sul legame che lega fattore di scala e redshift (espresso dalla relazione 1.30) [78]:

$$w(a) = w_0 + w_a(a - 1) \quad (4.33)$$

con $w_0 = -0.95$ oggi, e $w_0 + w_a$ a qualche tempo precedente, come per esempio l'equivalenza radiazione-materia. Dall'equazione 4.33 appare chiaro che con due parametri si può fissare il valore dell'equazione di stato oggi e ad alto redshift, ma l'evoluzione temporale tra questi due estremi non può cambiare: $dw/da = \text{cost}$. Come conseguenza, un'espansione lineare non riesce a descrivere eventuali rapide variazioni dell'equazione di stato.

Nonostante questi problemi, il modello sopra scritto è egualmente diventato un buon test per valutare l'efficacia di futuri esperimenti nel vincolare i modelli di energia oscura [2, 79]. Ed è proprio questo il secondo modello che teniamo in conto nella nostra analisi dati.

4.3.2 Il calcolo delle derivate

I vantaggi della tecnica della matrice di Fisher consistono in un approccio semplificato dal punto di vista della trattazione computazionale in confronto ad altri metodi. Tuttavia, bisogna dire che l'analisi fatta con la matrice di Fisher non è equivalente ad una analisi completa della likelihood, perché l'espansione in serie di Taylor effettuata per derivare la matrice di Fisher è valida solo in regioni vicine a quella del punto di best-fit. Quando ci allontaniamo da questo punto gli errori diventano più grandi o anche più piccoli degli errori dati da $\sqrt{F^{-1}}$. Oltretutto la matrice di Fisher è molto sensibile ai piccoli errori numerici che possono svilupparsi nel calcolo delle derivate $\frac{\partial \hat{C}_l}{\partial \lambda_\alpha}$, ed elementi vicini allo zero possono essere incrementati significativamente quando si inverte la matrice [39]. Concretamente, questi discorsi sono legati alla strategia del calcolo numerico delle derivate. Quando possibile, applichiamo il metodo di computare una derivata a due lati; il rapporto incrementale è [20]:

$$\frac{\partial \hat{C}_l}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{\hat{C}_l(\lambda_\alpha^0 + \Delta\lambda_\alpha) - \hat{C}_l(\lambda_\alpha^0 - \Delta\lambda_\alpha)}{2\Delta\lambda_\alpha} \quad (4.34)$$

dove λ_α^0 rappresentano i valori dei parametri del modello fiduciale. Solitamente per calcolare le derivate, è d'uopo scegliere degli intervalli $\Delta\lambda_\alpha$, i più piccoli possibili senza introdurre del rumore numerico nel risultato. In pratica, incrementiamo $\Delta\lambda_\alpha$ finché vediamo che le derivate sono regolari e non presentano delle violente oscillazioni, se questi sbalzi si presentano vuol dire che sono il frutto di errori numerici e si deve aumentare, del necessario, l'intervallo.

Per la nostra analisi abbiamo scelto un intervallo del 5% per ogni parametro. Intervallo né troppo piccolo né troppo grande che evita il formarsi di errori numerici. L'unica eccezione l'abbiamo fatta per il $\log_{10} c_s^2$ per il quale abbiamo dovuto usare un intervallo anche più grande del valore stesso del parametro per evitare oscillazioni numeriche nelle derivate risultanti. Le derivate sono state calcolate con un programma in fortran77 che prende in input gli spettri della temperatura, polarizzazione, ISW e gli altri che costituiscono l'output di CMBCROSSFAST [68], e applicando la formula 4.34 procede nel computare le derivate, stampandole quindi su file che vengono poi letti dal programma preposto al calcolo della matrice di Fisher e degli errori sui parametri cosmologici.

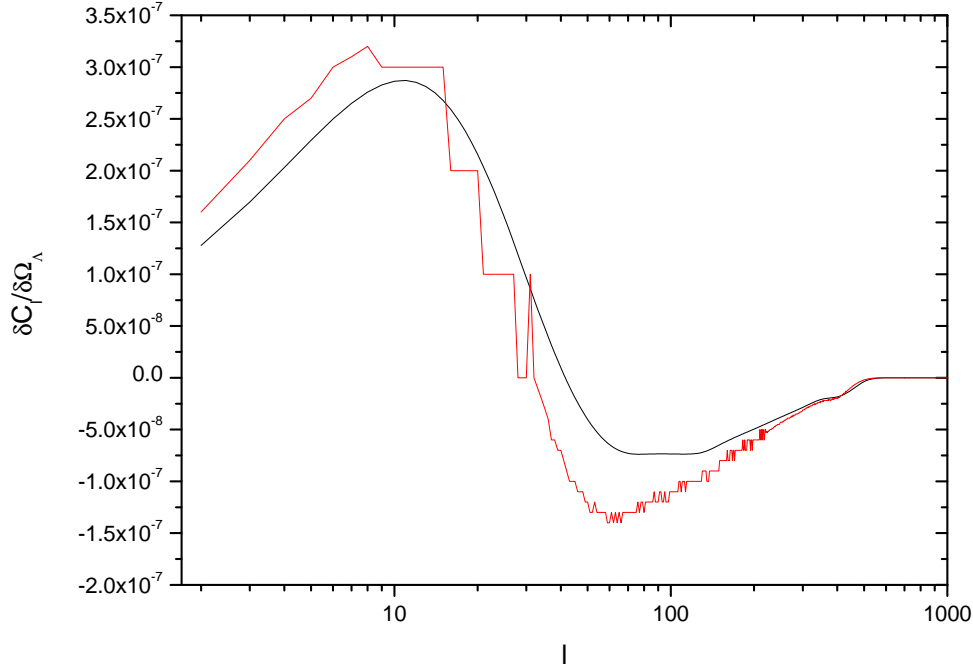


Figura 4.1: Derivate dello spettro di cross-correlazione dell'ISW nel parametro Ω_Λ . La curva rossa corrisponde ad una derivata affetta da errori numerici dovuti ad un intervallo piccolo, mentre la curva nera rappresenta una derivazione corretta per una scelta dell'intervallo ragionevole (5%).

4.4 Il calcolo delle matrici di covarianza

Vediamo ora nel dettaglio come si sviluppano i calcoli delle matrici di covarianza dell'effetto ISW, che compare nella matrice di Fisher 4.35 e la matrice di covarianza della CMB, che sta nella matrice di Fisher della CMB 4.42. Come accennato nel paragrafo precedente, per sviluppare i calcoli delle matrici di covarianza e delle matrici di Fisher, abbiamo scritto un programma in linguaggio fortran77 che letti in input: gli errori sugli spettri costruiti attraverso i dati di WMAP e Planck, le derivate degli spettri considerati calcolati con un altro apposito programma, da in output le incertezze, ad una sigma, sui parametri cosmologici presi in esame.

4.4.1 La matrice di covarianza dell'ISW

La matrice di Fisher per l'effetto ISW è:

$$F_{\alpha,\beta}^X = f_{\text{sky}} \sum_{l=l_{\text{min}}}^{l_X} \sum_{i,j} \frac{\partial X_l^i}{\partial \lambda_\alpha} \text{Cov}^{-1}(X_l^i X_l^j) \frac{\partial X_l^j}{\partial \lambda_\beta} \quad (4.35)$$

dove $\text{Cov}^{-1}(X_l^i X_l^j)$, come le derivate parziali, sono valutate ai valori fiduciali del modello teorico; f_{sky} è la più piccola frazione di cielo tra quella usata per la CMB e quella dei campioni di galassie, in questo caso è $f_{\text{sky}} = 0.5$, che è quella della survey LSST, mentre WMAP e Planck hanno un $f_{\text{sky}} = 0.8$. $l_X = 1500$, anche se la maggior parte del segnale viene da multipoli $l < 500$ e $l_{\text{min}} \approx \pi/(2f_{\text{sky}})$. Gli spettri X_l sono i coefficienti dell'espansione in polinomi di Legendre della quantità definita dalla 3.9 e possono riferirsi agli spettri di cross-correlazione o autocorrelazione, gli apici (i,j) rappresentano i bin in cui abbiamo suddiviso la funzione di distribuzione totale delle galassie.

La matrice di covarianza per l'effetto ISW è data da:

$$\text{Cov}(X_l^i X_l^j) = \frac{(\hat{C}_l^{TT} \hat{C}_l^{gg(i,j)} + X_l^i X_l^j)}{2l + 1} \quad (4.36)$$

Con $X_l^i = C_l^{gT i}$, dove i e j designano i bin. $C_l^{gg(i,j)}$ risulta essere una matrice $n_b \times n_b$ con $n_b = 8$ numero dei bin, composta sulla diagonale dalla cross-correlazione tra i bin uguali, mentre fuori diagonale ci sono tutte le possibili correlazioni tra bin diversi, naturalmente le correlazioni tra bin adiacenti danno un contributo maggiore rispetto a quelle tra bin distanti tra loro come, per esempio, il primo e l'ottavo, che daranno un contributo quasi nullo. Gli spettri osservati consistono della somma del segnale e del rumore:

$$\hat{C}_l^{gg(i,j)} = C_l^{gg(i,j)} + N_l^{(i,j)} \quad (4.37)$$

$$\hat{C}_l^{AA} = C_l^{AA} + N_l^{AA} \quad (4.38)$$

con $A = T, E$. L'errore della 4.37 è un errore poissoniano, dove non c'è correlazione tra i bin, che contribuisce solo alla autocorrelazione tra le galassie come:

$$N_l^{(i,j)} = \frac{\delta_{ij}}{\bar{n}_A^i} \quad (4.39)$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker e $\bar{n}_A^i = \bar{N}^i / f_{\text{sky}} \times 41253 \times 60^2$ è il numero di galassie per angolo solido nell' i -esimo bin. \bar{N}^i è definito dalla 3.39 e 41253 è la misura del cielo in radianti. Invece il contributo del rumore 4.38 agli spettri dell'autocorrelazione della temperatura (TT), della polarizzazione (EE), e

della cross-correlazione (TTEE) della CMB, per un determinato canale di frequenza, rappresentato dal pedice c , è:

$$N_{l,c}^{AA} = \left(\frac{\sigma_{A,c} \theta_{FWHM,c}}{T_0} \right)^2 \exp \left\{ \frac{l(l+1) \theta_{FWHM,c}^2}{8 \ln 2} \right\} \quad (4.40)$$

dove T_0 è la temperatura di corpo nero della CMB data dalla 2.10, $\sigma_{A,c}$ è la dispersione del beam angolare (con $A = T, E$) e $\theta_{FWHM,c} = \sqrt{8 \ln 2} \sigma_{A,c}$ è la larghezza a mezza altezza del medesimo beam. Il rumore combinato tra tutti i canali è:

$$N_l^{AA} = \left[\sum_c (N_{l,c}^{AA})^{-1} \right]^{-1} \quad (4.41)$$

I valori delle quantità che compaiono nella 4.40 sono riportati nella tabella 4.2 per i due esperimenti che abbiamo usato nell'analisi dei dati: WMAP [66] e Planck [67].

	Planck			WMAP		
ν (GHz)	100	143	217	41	61	94
θ_{FWHM} (arc min)	10.7	8.0	5.5	28	21	13
σ_T (μK)	5.4	6.0	13.1	22	29	49
σ_E (μK)	4	11.4	26.7	30	45	75

Tabella 4.2: Le quantità rilevanti di WMAP e Planck per i tre canali usati per i due esperimenti considerati. Usiamo le tre canali di frequenza più alta per WMAP e i più bassi per Planck HFI. Invece si ha: $\sigma_{TE} = \sqrt{\sigma_T \sigma_E}$ per la cross-correlazione TTEE.

4.4.2 La matrice di covarianza della CMB

Per misure della CMB, la matrice di Fisher si presenta come [81]:

$$F_{\alpha,\beta}^{CMB} = f_{sky} \sum_{l=2}^{l_{CMB}} \sum_{A,B} \frac{\partial \hat{C}_l^A}{\partial \lambda_\alpha} \text{Cov}^{-1}(\hat{C}_l^A \hat{C}_l^B) \frac{\partial \hat{C}_l^B}{\partial \lambda_\beta} \quad (4.42)$$

dove le matrici per $A = TT, EE, TE$ sono date in [106] e $l_{CMB} = 1500$. Essendo questa la matrice di Fisher della sola CMB, qui $f_{sky} = 0.8$; che è la frazione di cielo osservata da WMAP e prevista per Planck. Anche qui le derivate e la matrice di covarianza sono calcolate a partire dai valori del

modello teorico fiduciale visti nel paragrafo 4.3. La matrice di covarianza della CMB è [39]:

$$\text{Cov}_l = \frac{2}{2l+1} \begin{pmatrix} \tilde{C}_l^{TTTT} & \tilde{C}_l^{TTEE} & \tilde{C}_l^{TTTE} \\ \tilde{C}_l^{TTEE} & \tilde{C}_l^{EEEE} & \tilde{C}_l^{EETE} \\ \tilde{C}_l^{TTTE} & \tilde{C}_l^{EETE} & \tilde{C}_l^{TETE} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

con gli elementi della matrice dati da [20]:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_l^{TTTT} &= (\hat{C}_l^{TT})^2 \\ \tilde{C}_l^{EEEE} &= (\hat{C}_l^{EE})^2 \\ \tilde{C}_l^{TETE} &= \frac{1}{2}[(\hat{C}_l^{TE})^2 + \hat{C}_l^{TT} \hat{C}_l^{EE}] \\ \tilde{C}_l^{TTEE} &= (\hat{C}_l^{TE})^2 \\ \tilde{C}_l^{TTTE} &= \hat{C}_l^{TE} \hat{C}_l^{TT} \\ \tilde{C}_l^{EETE} &= \hat{C}_l^{TE} \hat{C}_l^{EE} \end{aligned}$$

dove gli spettri \hat{C}_l sono definiti dalla 4.38.

Tutti gli spettri coinvolti nelle precedenti espressioni sono stati ottenuti dal programma CMBCROSSFAST.

4.5 Vincoli sui parametri cosmologici

Data la matrice di Fisher, il limite inferiore sull'incertezza nella determinazione dei parametri λ_α è dato da [78]:

$$\Delta\lambda_i \geq C_{ii} = (F^{-1})_{ii} \quad (4.44)$$

Si possono dare dei vincoli da una combinazione di misure diverse per migliorare i vincoli stessi, semplicemente sommando le matrici di Fisher delle singole misure, per esempio, misure della cross-correlazione possono essere combinate con misure della CMB da Planck:

$$F_{\alpha\beta}^{Planck+ISW} = F_{\alpha\beta}^{Planck} + F_{\alpha\beta}^{ISW} \quad (4.45)$$

Nella nostra analisi abbiamo fatto questo sia per Planck che per WMAP. Assumendo una distribuzione gaussiana, l'incertezza a una sigma per un

parametro è $1/\sqrt{F}$. Vogliamo ora analizzare cosa succede se abbiamo più di un parametro alla volta libero di variare. Cominciamo [22] con il caso di due parametri λ_1 e λ_2 . Se λ_2 è fisso, allora l'errore su λ_1 sarà $(\sqrt{F_{11}})^{-1}$, ma se anche λ_2 varia, allora l'errore su λ_1 sarà $\sqrt{(F^{-1})_{11}}$. Nel dettaglio, la probabilità congiunta dei due parametri è:

$$P(\lambda_1, \lambda_2) \propto \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_i F_{ij} \lambda_j \right\} \quad (4.46)$$

dove, per semplicità, abbiamo assunto che la distribuzione ha un picco per $\lambda_i = 0$. Far sì che anche λ_2 vari, è equivalente ad integrare la distribuzione su tutti i possibili valori di λ_2 . A questo ci si riferisce come alla *marginalizzazione* su λ_2 . Perciò:

$$P(\lambda_1) = \int d\lambda_2 P(\lambda_1, \lambda_2) \propto \exp \left\{ -\frac{\lambda_1^2}{2} \left(\frac{F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}}{F_{22}} \right) \right\} \quad (4.47)$$

dove il termine tra parentesi tonde è uguale a $1/(F^{-1})_{11}$. Perciò, nel caso di molti parametri λ_i , l'errore a una sigma è:

$$\sigma(\lambda_i) = \sqrt{(F^{-1})_{ii}} \quad (i = 1, 2, \dots, n_p) \quad (4.48)$$

dove n_p è il numero di parametri presi in considerazione nella nostra analisi, lasciati liberi di variare. Per disegnare, in un sottospazio composto da due parametri, i grafici dei livelli di confidenza (delle ellissi), prendiamo prima la matrice di Fisher n_p -dimensionale, la invertiamo, poi prendiamo solo la sottomatrice 2×2 composta dagli elementi corrispondenti ai parametri considerati. Questa parte 2×2 , invertita, definisce l'ellissi che si vede nelle figure. I livelli a 95% e 68% corrispondono a dei piani che intersecano a delle altezze determinate la distribuzione proiettando quindi delle ellissi sul piano dei parametri.

4.5.1 Risultati e discussione

Nelle tabelle 4.3 e 4.4, sono riportate le incertezze sui parametri cosmologici presi in esame, ottenute col metodo della matrice di Fisher appena descritto. Come si vede per una matrice di Fisher di solo ISW, tra WMAP e Planck, non ci sono differenze apprezzabili alla seconda cifra decimale, con l'unica eccezione della costante di Hubble, la cui incertezza mostra una leggera diversità tra i dati di WMAP e quelli di Planck. Questo perché la copertura di cielo dei due esperimenti è la stessa, Planck però misura più accuratamente la CMB quindi i vincoli da questa derivati sono migliori. Notiamo anche che le migliori stime si ottengono usando una matrice di Fisher, somma di ISW e CMB, per errori sugli spettri calcolati con dati di Planck.

Si vede inoltre che l'ISW vincola meglio della CMB sia il $\log_{10} c_s^2$, che w_0 ,

parametri	modello1: errori a 1σ					
	WMAP			Planck		
	ISW	CMB	CMB+ISW	ISW	CMB	CMB+ISW
H_0	45.25	3.71	0.89	45.23	2.48	0.62
$\Omega_b h^2$	0.038	0.00018	0.00015	0.038	0.00013	0.00010
$\Omega_m h^2$	0.14	0.0073	0.0050	0.14	0.0055	0.0034
w_0	0.029	0.15	0.011	0.029	0.097	0.010
$\log_{10} c_s^2$	5.27	27.80	1.74	5.27	27.15	1.69
$\Omega_\nu h^2$	0.024	0.0036	0.00080	0.024	0.0029	0.00060
n_s	0.051	0.0055	0.0049	0.051	0.0036	0.0034
$N_\nu(m \neq 0)$	3.19	0.31	0.21	3.19	0.22	0.15
$N_\nu(m = 0)$	0.54	0.23	0.20	0.54	0.15	0.14
A_s	0.31	0.0089	0.0084	0.31	0.0066	0.0064
τ	1.34	0.0032	0.0030	1.34	0.0023	0.0022

Tabella 4.3: Incertezze ad 1σ sui parametri cosmologici presi in esame per il modello di energia oscura costante nel tempo, ottenuti col metodo della matrice di Fisher, per errori sugli spettri calcolati sia per WMAP che per Planck. Sono state usate sia una Fisher di solo ISW e di solo CMB, poi una matrice somma delle precedenti. Come si vede in quest'ultimo caso gli errori sono minori rispetto agli altri due, specialmente per Planck.

che w_a : cioè tutti i parametri riferibili all'energia oscura. Da questo fatto possiamo affermare che l'effetto Sachs-Wolfe integrato può essere usato per dare delle ottime stime soprattutto dei parametri dell'equazione di stato dell'energia oscura e della velocità del suono in essa.

Le tabelle sono due perché due sono i modelli di energia oscura che abbiamo considerato: equazione di stato costante (modello 1), ed equazione di stato

che varia col tempo (modello 2).

Le incertezze sono, quasi sempre, poco più piccole per il modello 1, di

parametri	modello2: errori a 1σ					
	WMAP			Planck		
	ISW	CMB	CMB+ISW	ISW	CMB	CMB+ISW
H_0	55.03	4.63	1.31	54.99	3.42	1.06
$\Omega_b h^2$	0.046	0.00019	0.00015	0.045	0.00013	0.00011
$\Omega_m h^2$	0.16	0.0074	0.0055	0.16	0.0057	0.0039
w_0	0.15	0.49	0.089	0.15	0.27	0.081
$\log_{10} c_s^2$	5.51	28.65	1.76	5.51	27.81	1.70
$\Omega_\nu h^2$	0.027	0.0036	0.0012	0.027	0.0029	0.0010
n_s	0.067	0.0055	0.0050	0.067	0.0036	0.0035
$N_\nu(m \neq 0)$	3.73	0.31	0.23	3.72	0.22	0.17
$N_\nu(m = 0)$	0.54	0.23	0.20	0.54	0.15	0.14
A_s	0.37	0.0091	0.0084	0.37	0.0067	0.0064
τ	1.34	0.0033	0.0030	1.34	0.0023	0.0022
w_a	0.29	2.06	0.20	0.29	1.27	0.18

Tabella 4.4: Incertezze ad 1σ sui parametri cosmologici presi in esame per il modello di energia oscura variabile nel tempo, ottenuti col metodo della matrice di Fisher, per errori sugli spettri calcolati sia per WMAP che per Planck. Sono state usate sia una Fisher di solo ISW e di solo CMB, poi una matrice somma delle precedenti. Come si vede in quest'ultimo caso gli errori sono minori rispetto agli altri due, specialmente per Planck.

energia oscura costante nel tempo. Questo perché viene considerato un solo parametro da far variare per l'energia oscura: w_0 , mentre, per il modello 2, di energia oscura che varia col tempo, abbiamo 2 parametri liberi di variare: w_0 e w_a . Un numero maggiore di parametri: 12 contro 11, fa sì che la potenza di calcolo della matrice di Fisher nell'inferire i parametri sia un po' più affievolita.

Discutiamo ora i risultati ottenuti dall'analisi delle funzioni di verosimiglianza bidimensionali (likelihood) marginalizzate nel piano dei parametri (due alla volta). Poiché i vincoli sono più stringenti, utilizziamo, per i grafici, solo i dati riferibili a Planck. È importante notare che questi grafici sono marginalizzati solo nello spazio di due parametri, mentre i valori delle incertezze, anche per WMAP, ad 1σ riportati nelle tabelle 4.4 e 4.3 risultano dal calcolo effettuato tenendo conto di tutti i parametri del modello: 12 e 11 rispettivamente, quindi non bisogna stupirsi se i contorni ad 1 e 2σ disegnati nei grafici seguenti non corrispondano a quelli delle tabelle, che sono maggiori perché

marginalizzati su un numero più grande di parametri; fondamentalmente i grafici servono per mostrare la degenerazione tra i parametri considerati, il risultato più significativo e realistico è quello delle tabelle.

I valori fiduciali considerati nel calcolo delle matrici di Fisher sono riportati nel paragrafo 4.3. I grafici dei livelli di confidenza si riferiscono al secondo insieme di parametri preso in esame, nel quale troviamo anche i parametri di un'equazione di stato dell'energia oscura variabile nel tempo: $w(a) = w_0 + w_a(a - 1)$.

Nelle figure 4.3 e 4.2, si vedono i vincoli nel piano $\log_{10} c_s^2 - w_0$ e nel piano

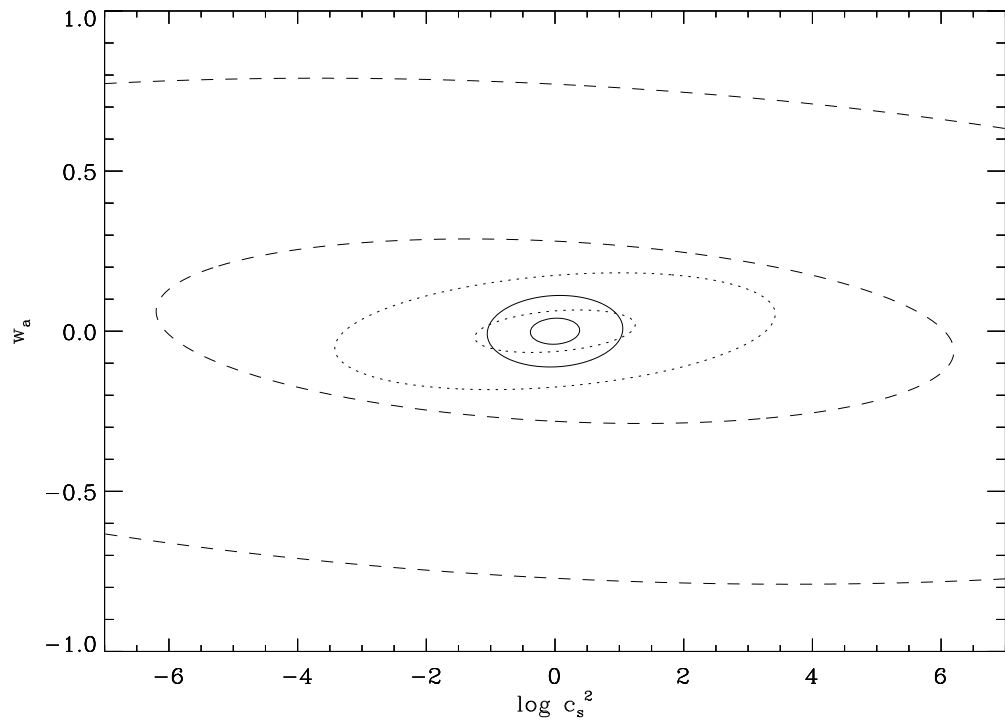


Figura 4.2: Verosimiglianze bidimensionali nel piano $\log_{10} c_s^2 - w_a$. Le curve rappresentano i livelli di confidenza al 68% e 95% (1 e 2σ), per solo Planck (linea tratteggiata), solo ISW (linea a puntini) e ISW+Planck (linea continua).

$\log_{10} c_s^2 - w_a$. I contorni corrispondono ai livelli di confidenza al 68% e 95%. Appare evidente che questi parametri sono vincolati molto meglio dall'effetto ISW che dai dati CMB forniti da Planck. Sommando poi le matrici di Fisher dell'ISW e di Planck (CMB) si ottengono dei vincoli ancora più stringenti, anche se le degenerazioni non sono ortogonali. Al 68% di significatività per w_0 si ha un limite pari a $-1.27 < w_0 < -0.63$ per solo ISW mentre per ISW+Planck i vincoli sono più stringenti: $-1.11 < w_0 < -0.79$, idem

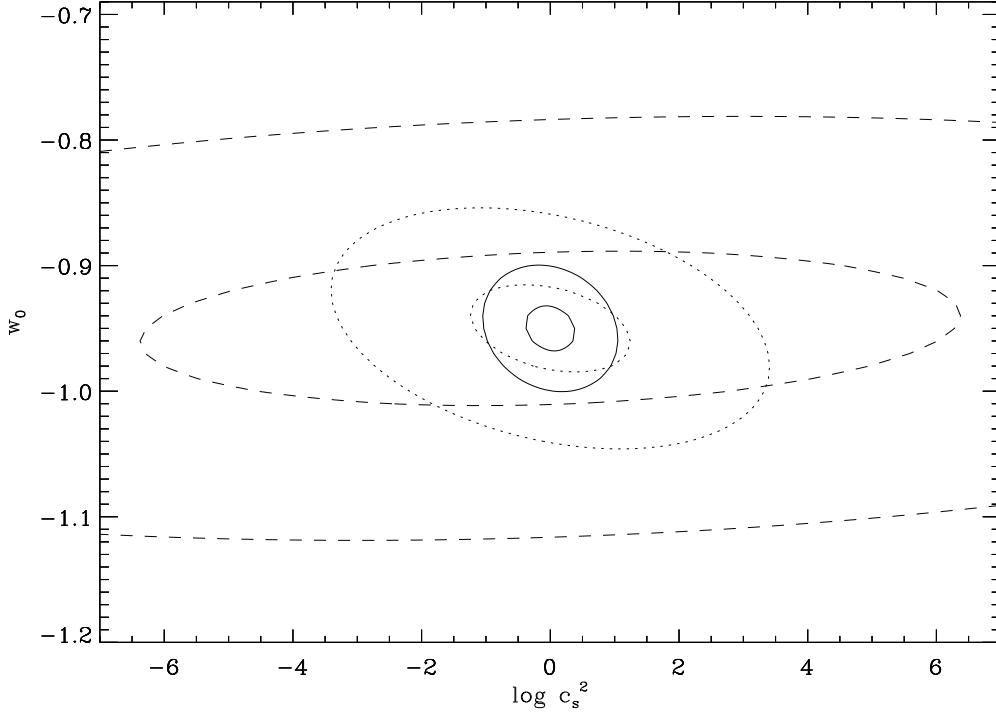


Figura 4.3: Verosimiglianze bidimensionali nel piano $\log_{10} c_s^2 - w_0$. Le curve rappresentano i livelli di confidenza al 68% e 95%, per solo Planck (linea tratteggiata), solo ISW (linea a puntini) e ISW+Planck (linea continua).

per solo ISW al 95% di significatività, mentre per ISW+Planck otteniamo: $-1.03 < w_0 < -0.87$.

Notiamo in particolare che l'effetto ISW è utile nel dare dei vincoli sulla velocità del suono nell'energia oscura, parametrizzata come $\log_{10} 0c_s^2$. Sempre facendo riferimento alla tabella 4.4, vediamo che a 1σ i vincoli, per ISW+Planck sono: $-1.7 < \log_{10} 0c_s^2 < 1.7$, che può essere considerata una buona stima. Interessante è anche mostrare i limiti che possiamo porre sull'energia oscura nel piano $w_0 - w_a$. Infatti, grazie ad una funzione di distribuzione delle galassie binnata, è possibile seguire nella sua evoluzione in redshift l'energia oscura. In figura 4.4 mostriamo i contorni a 1 e 2σ nel piano $w_0 - w_a$, anche in questo caso le degenerazioni non sono diagonali. Comunque dall'analisi condotta sulla matrice di Fisher somma di quella di Planck e dell'ISW, per w_a risultano, ad 1σ i seguenti vincoli: $-0.18 < w_a < 0.18$.

Abbiamo visto come la cross-correlazione tra la CMB e le strutture a larga scala costituisce un buon modo per studiare l'energia oscura. Isolando il contributo dell'effetto Sachs-Wolfe integrato dalle anisotropie primarie della

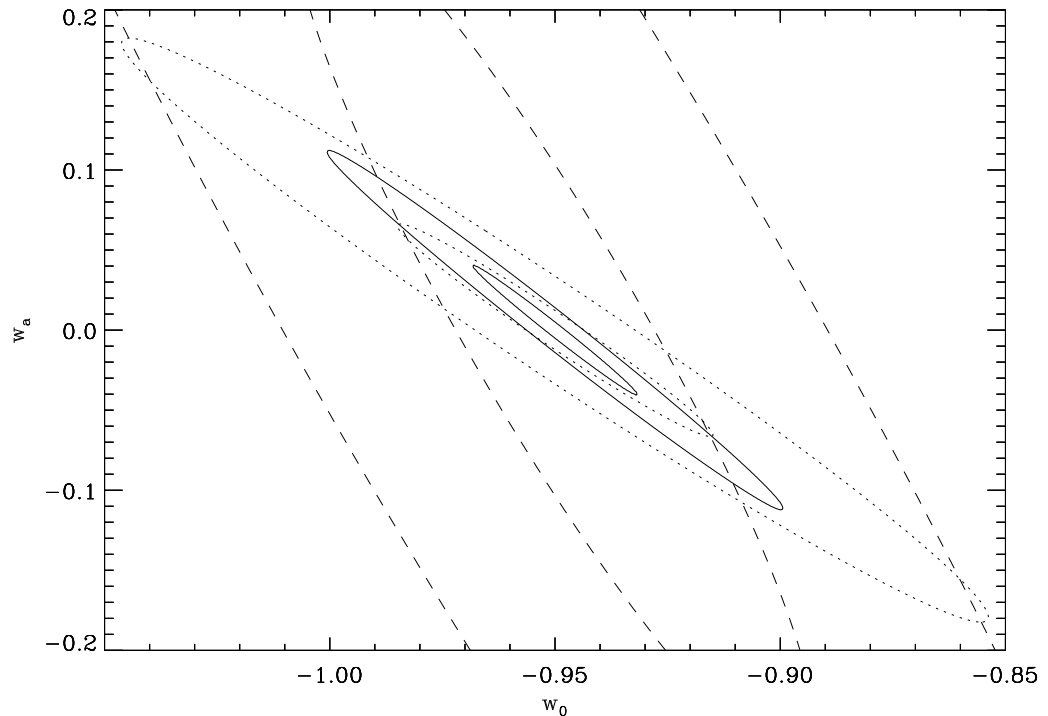


Figura 4.4: Verosimiglianze bidimensionali nel piano $w_0 - w_a$. Le curve rappresentano i livelli di confidenza al 68% e 95%, per solo Planck (linea tratteggiata), solo ISW (linea a puntini) e ISW+Planck (linea continua).

CMB grazie alla correlazione con la materia, che è sensibile alle proprietà dell'energia oscura, possiamo ottenere dei buoni vincoli su questa forma di energia.

È particolarmente interessante porre dei limiti sull'equazione di stato dell'energia oscura w_0 e sulla sua velocità del suono c_s^2 . Abbiamo anche considerato due diversi modelli per l'energia oscura: uno costante, descritto dal solo parametro w_0 , e l'altro variabile nel tempo, descritto da due parametri: w_0 e w_a . Fondamentale da questo punto di vista è stata la possibilità di suddividere la funzione di distribuzione delle galassie in bin centrati a redshift diversi, così da vincolare meglio l'evoluzione in redshift dell'energia oscura.

Dobbiamo anche considerare che l'ISW è insensibile ad alcuni parametri, come la reionizzazione, che solitamente limitano la precisione della misura dell'energia oscura dalla sola CMB, come si vede dai grafici, infatti i livelli di confidenza della sola CMB che risultano dai dati di solo Planck cingono una regione di spazio dei parametri maggiore di quella racchiusa dai livelli del solo ISW o ancor più della combinazione delle verosimiglianze della CMB

e dell'ISW. L'unica necessità consiste nel conoscere abbastanza bene il bias galattico 3.7 che lega le fluttuazioni di densità di materia oscura a quelle della materia visibile nelle galassie [80]; nel nostro caso il bias è stato preso costante ed uguale per ogni bin di redshift. In pratica l'ISW è in grado di vincolare meglio di altre misurazioni i parametri dell'energia oscura sia costante che variabile temporalmente, ed anche la sua velocità del suono, risultato questo impossibile fino a pochi anni fa, data l'impossibilità di disporre di survey di galassie adeguate.

Fin qui abbiamo visto i parametri che sono vincolati meglio dall'ISW che

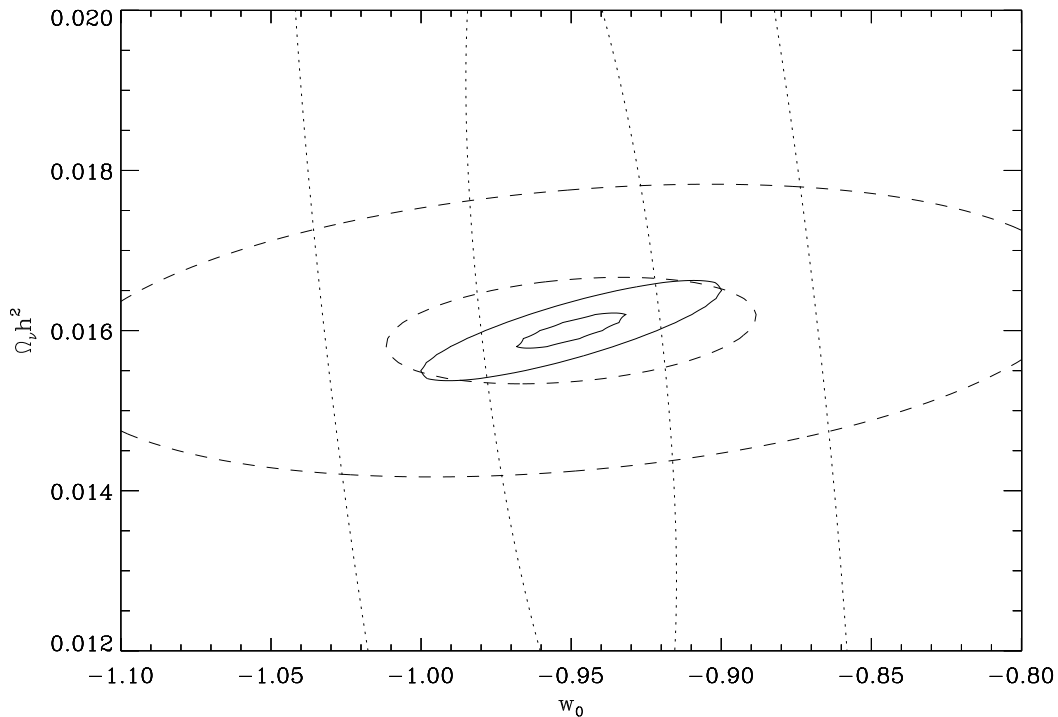


Figura 4.5: Verosimiglianze bidimensionali per combinazioni del parametro $w_0 - \Omega_\nu h^2$. I livelli di confidenza al 68% e 95% sono: per Planck (linea tratteggiata), ISW (linea a puntini) e ISW+Planck (linea continua).

dalla sola CMB, ora invece proviamo a vedere i limiti che derivano dalle combinazioni del parametro dell'equazione di stato dell'energia oscura w_0 con i parametri di densità di materia $\Omega_m h^2$, dei barioni $\Omega_b h^2$ e dei neutrini $\Omega_\nu h^2$, per far questo usiamo solo il modello 1 di energia oscura costante.

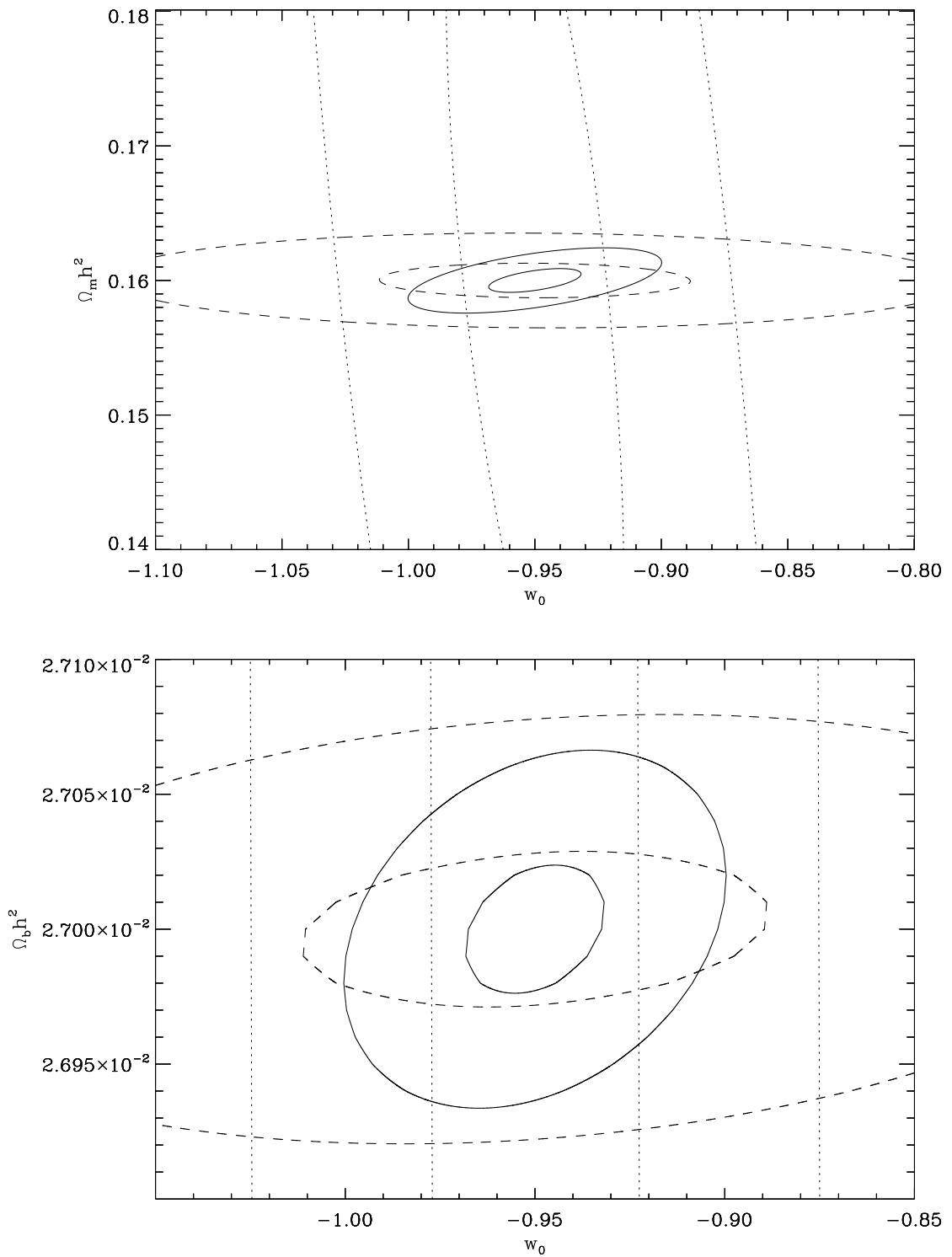


Figura 4.6: Verosimiglianze bidimensionali per combinazioni del parametro w_0 con i parametri di densità $\Omega_m h^2$, $\Omega_b h^2$. I livelli di confidenza al 68% e 95% sono: per Planck (linea tratteggiata), ISW (linea a puntini) e ISW+Planck (linea continua).

I grafici relativi a queste combinazioni di parametri sono mostrati nelle figure 4.5 e 4.6.

Come si vede da queste figure i livelli di confidenza del solo effetto ISW racchiudono una regione di spazio dei parametri più grande di quelli dati dalla CMB, quindi in questo caso, anche se è coinvolto un parametro dell'energia oscura, i vincoli migliori vengono dalla CMB, ed una combinazione di CMB e ISW è quella che fornisce i limiti più stretti sui parametri di densità che abbiamo prima elencato.

Ci accorgiamo però che in queste combinazioni le degenerazioni, dei dati ISW e CMB, tra i parametri sono ortogonali. Ciò vuol dire che anche se i limiti dall'ISW sono più deboli, contribuiscono comunque, combinati con quelli della CMB, all'affinare i vincoli sui parametri considerati. Infatti, in riferimento alla tabella 4.3 si hanno i seguenti limiti: $0.1566 < \Omega_m h^2 < 0.1634$ per il parametro di densità di materia, $0.0269 < \Omega_b h^2 < 0.0271$ per il parametro di densità dei barioni e $0.0154 < \Omega_\nu h^2 < 0.0166$ per il parametro di densità dei neutrini.

In figura 4.7, riportiamo altri due esempi di verosimiglianze bidimensionali ottenute dall'analisi delle matrici di Fisher. Nella nostra analisi abbiamo, tra gli altri parametri cosmologici, considerato anche il numero di neutrini massivi N_ν^m e relativistici (a massa nulla) N_ν^0 . Nel primo grafico della figura 4.7 vediamo che i livelli di confidenza dell'ISW e della CMB sono ortogonali tra loro, pur se i contorni dell'ISW sono molto più grandi e quindi meno vincolanti. Questa ortogonalità non si riscontra se consideriamo i neutrini relativistici, perciò non ne mostriamo il grafico. Nel grafico in basso, invece, mostriamo i limiti che possono essere posti sulla costante di Hubble H_0 se marginalizzata insieme al parametro di densità di materia. Si vede che l'ISW vincola malissimo questo parametro, così la bontà dei vincoli che si riscontra nella combinazione delle verosimiglianze, deriva soprattutto dai dati della sola CMB. Sempre facendo ricorso ai risultati trovati, esposti nelle tabelle 4.3 e 4.4, possiamo porre dei limiti anche sul numero di neutrini. Per il numero dei neutrini massivi si ha: $2.85 < N_\nu^m < 3.15$, e per i neutrini relativistici: $-0.1 < N_\nu^0 < 0.18$. Invece per la costante di Hubble: $71.28 < H_0 < 72.52$. Tutti questi limiti risultano dalla combinazione delle matrici di Fisher dell'effetto Sachs-Wolfe integrato e della radiazione cosmica di fondo.

Se si vogliono vedere tutti i limiti che abbiamo trovato nella nostra analisi, basta consultare le tabelle citate, dove si possono trovare tutte le incertezze ad 1σ per tutti i parametri cosmologici considerati per entrambi i modelli di energia oscura.

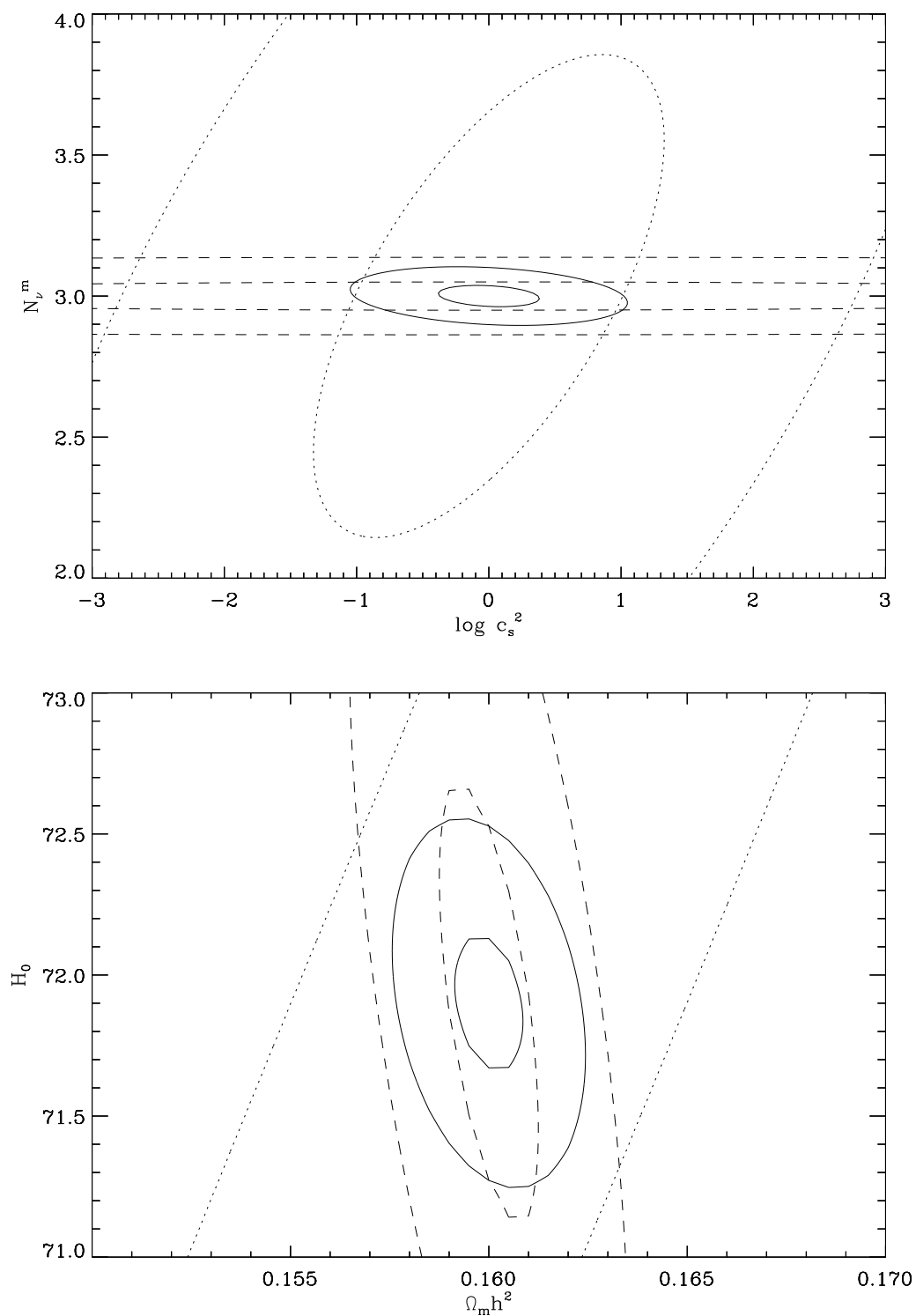


Figura 4.7: Verosimiglianze bidimensionali nel piano $\log_1 0c_s^2 - N_\nu^m$ (in alto) e nel piano $\Omega_m h^2 - H_0$ (in basso). I livelli di confidenza al 68% e 95% sono: per Planck (linea tratteggiata), ISW (linea a puntini) e ISW+Planck (linea continua).

Conclusioni

In questo lavoro abbiamo cercato di porre dei vincoli sui principali parametri cosmologici, ed in particolare su quelli dell'energia oscura, utilizzando l'effetto Sachs-Wolfe integrato, che può essere determinato tramite la cross-correlazione tra la temperatura della radiazione di fondo cosmico (CMB) ed i cataloghi di galassie.

Per prima cosa, abbiamo descritto il modello cosmologico standard, ed evidenziato che materia e radiazione non bastano da sole a descrivere l'espansione accelerata che l'universo sta subendo. Espansione confermata da misure sperimentali, legate alle osservazioni effettuate negli ultimi anni. Da queste osservazioni si evince che l'universo è dominato da una forma di energia di cui non conosciamo l'origine, perciò definita energia oscura.

Tra i vari modelli di energia oscura ad essere presi in considerazione, per primo da Einstein, c'è la costante cosmologica, che presenta però dei problemi. Dunque si sono sviluppati anche altri modelli. In un universo basato sul modello cosmologico standard l'energia oscura è completamente descritta dalla sua equazione di stato w . Nella nostra analisi, abbiamo quindi considerato due diversi modelli di energia oscura, il primo descritto da un'equazione di stato costante ($w_0 = -0.95$), l'altro da un'equazione di stato dipendente dal tempo ($w(a) = w_0 + w_a(a - 1)$ con $w_0 = -0.95$ e $w_a = 0$ come valori fiduciali) così da alleviare il problema del *why now?* insito in un modello di energia oscura costante nel tempo.

Come preludio alla trattazione dell'effetto Sachs-Wolfe integrato abbiamo sviluppato quantitativamente la teoria che descrive l'origine e le caratteristiche della CMB, e la composizione dello spettro di potenza delle sue anisotropie. L'effetto Sachs-Wolfe integrato (ISW) è una delle anisotropie secondarie, generate dall'epoca del last scattering ad oggi, della CMB, originata dal passaggio dei fotoni in un potenziale gravitazionale variabile nel tempo, variazione indotta da un contributo non trascurabile di energia oscura. Il segnale di questo effetto è dieci volte minore di quello totale prodotto in tempi primordiali, inoltre si trova nella zona dello spettro affetta dalla va-

rianza cosmica, dunque difficilmente rivelabile da solo. A questo scopo è stata studiata una tecnica di rivelazione che consiste nella correlazione tra le anisotropie di temperatura della CMB e dei cataloghi di galassie. Infatti, nei tempi relativamente recenti in cui si manifesta l'effetto ISW le strutture galattiche erano presenti. Correlando la temperatura con le galassie si sfrutta la capacità di queste ultime di tracciare efficientemente le buche di potenziale gravitazionale, inoltre il contributo maggioritario delle anisotropie primarie sarà annullato perché completamente scorrelato con le galassie stesse.

Lo spettro della cross-correlazione è stato calcolato dal programma CMB-CROSSFAST che abbiamo provveduto a modificare. Per la correlazione abbiamo usato i dati e la funzione finestra del telescopio di prossima costruzione LSST, mentre per la CMB sono stati usati i dati provenienti dal satellite WMAP e dal satellite Planck.

Una grande attenzione è stata posta riguardo alla suddivisione della funzione finestra in bin centrati a redshift diversi, per potenziare la ricostruzione dell'evoluzione in redshift del segnale di cross-correlazione. Abbiamo testato diverse configurazioni variando il numero dei bin e la loro larghezza per vedere quale fosse quella che permetteva di ottenere le incertezze minori sui parametri. Abbiamo visto, come risultato, che la miglior cosa è suddividere la funzione finestra in 8 bin di redshift con una larghezza $\Delta z = 0.2$.

Per l'analisi dei dati abbiamo usato il metodo della matrice di Fisher per calcolare i vincoli da porre sui parametri cosmologici. Per far questo abbiamo scritto un programma che svolgesse i calcoli. Per avere dei buoni vincoli è necessario sommare alla matrice di solo ISW quella dei dati della CMB. Abbiamo anche riscontrato che le incertezze sui parametri si riducono sensibilmente utilizzando i dati di Planck rispetto a quelli di WMAP, grazie alla migliore risoluzione dello strumento.

Ottenute le matrici di Fisher, abbiamo ricavato le funzioni di verosimiglianza marginalizzate sui parametri di maggiore interesse cosmologico.

Dalle incertezze che escono dal calcolo della matrice di Fisher è stato anche possibile osservare che queste si riducevano lievemente per il modello di energia oscura costante rispetto a quello con variazione temporale, solo perché il secondo modello ha due parametri da far variare (w_0, w_a), mentre il primo uno solo w_0 : perciò la potenza di calcolo nel caso di un parametro in meno sarà maggiormente concentrata, col risultato di ridurre gli errori. Per un'equazione di stato dell'energia oscura costante, per un valore fiduciale pari a $w_0 = -0.95$, una velocità del suono nell'energia oscura $c_s^2 = 1$, considerando le migliori stime (Planck), dalla combinazione delle matrici di Fisher

dell'ISW ed della CMB si ha:

$$-0.96 < w_0 < -0.94$$

mentre per il modello di energia oscura variabile nel tempo otteniamo, per i due parametri che la descrivono le seguenti stime:

$$-1.03 < w_0 < -0.87$$

$$-0.18 < w_a < 0.18$$

Per la velocità del suono nell'energia oscura, prendiamo i vincoli trovati nel modello in cui è assunta costante, perché più stringenti:

$$-1.69 < \log c_s^2 < 1.69$$

Tutti i limiti sono presi al 95% di livello di confidenza per ISW+CMB. Come si è visto il metodo della correlazione tra CMB e survey di galassie, finalizzato alla rilevazione dello spettro Sachs-Wolfe integrato, consente una buona stima dei parametri cosmologici, su tutti quelli dell'energia oscura; è inoltre indipendente da altri metodi di misura dei parametri. Nel futuro prossimo grazie al satellite Planck, appena lanciato, a nuovi strumenti di rivelazione previsti, come il telescopio LSST, le cui caratteristiche sono state utilizzate in questo lavoro, si potranno avere delle conferme dei risultati ottenuti, oltre che ulteriori sviluppi e miglioramenti così da poter vincolare, tramite l'ISW, anche parametri su cui oggi non fornisce dei limiti precisi.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare tutte le persone che mi hanno aiutato in questo lavoro, in particolare il mio relatore Alessandro Melchiorri per avermi sopportato durante tutto questo tempo; il dottor Pier Stefano Corasaniti del LUTH Observatoire de Paris/Meudon che mi ha accolto nel suo studio e mi ha seguito nello sviluppo dei calcoli nonostante i pressanti impegni; ed il dottor Francesco De Bernardis per avermi introdotto ai linguaggi fortran 77 ed IDL e per i numerosi chiarimenti. Ringrazio inoltre i dottorandi Erminia, Luca, Matteo e Silvia per i suggerimenti e consigli e tutta la saletta laureandi, i cui membri sarebbe troppo lungo elencare.

Elenco delle figure

1.1	Vincoli su Ω_Λ, Ω_m da misure di SN Ia	21
1.2	Abbondanze degli elementi prodotti durante la nucleosintesi	37
2.1	Mappe del cielo CMB dai diversi satelliti	53
2.2	Lo spettro di potenza angolare della CMB	62
2.3	Oscillazioni acustiche del fluido fotobarionico	69
2.4	Spettro CMB al variare di $\Omega_b h^2$	71
2.5	Effetto del termine forzante sulle oscillazioni acustiche	72
2.6	Spettro CMB al variare del parametro di Hubble h	73
2.7	Meccanismo della reionizzazione	75
2.8	Contributi allo spettro totale della CMB	77
2.9	Campo di polarizzazione di modi E e B della CMB	79
2.10	Spettri della temperatura e della polarizzazione E della CMB	81
3.1	Variazione dello spettro dell'ISW al variare della costante di Hubble e di Ω_Λ	85
3.2	Early e late ISW	87
3.3	La funzione di correlazione angolare a due punti dell'ISW	92
3.4	Forma caratteristica dello spettro di cross-correlazione che mette in evidenza il contributo dell'effetto ISW	93
3.5	Variazioni dello spettro di cross-correlazione al variare del parametro di densità di materia Ω_m	95
3.6	Variazione dello spettro di cross-correlazione al variare del parametro di Hubble	96
3.7	Variazione dello spettro di cross-correlazione al variare del parametro Ω_b	97
3.8	Variazione dello spettro di cross-correlazione al variare dell'equazione di stato dell'energia oscura	98
3.9	Variazione dello spettro di cross-correlazione al variare della densità d'energia dei neutrini Ω_ν e dell'indice spettrale scalare n_s	99

3.10	Contributi dei diversi bin allo spettro di potenza della cross-correlazione g_T	105
3.11	Confronto sui vincoli sullo spettro di potenza della CMB tra WMAP e le future misurazioni di Planck	107
3.12	La funzione finestra per LSST usata nel programma CMB-CROSSFAST.	108
3.13	Un'immagine del satellite WMAP	109
3.14	Un'immagine del satellite Planck.	110
4.1	Esempio di derivata di uno spettro	125
4.2	Verosimiglianze bidimensionali nel piano $\log_{10} c_s^2 - w_a$	132
4.3	Verosimiglianze bidimensionali nel piano $\log_{10} c_s^2 - w_0$	133
4.4	Verosimiglianze bidimensionali nel piano $w_0 - w_a$	134
4.5	Verosimiglianze bidimensionali nel piano $w_0 - \Omega_\nu h^2$	135
4.6	Verosimiglianze bidimensionali per combinazioni del parametro w_0 con i parametri di densità $\Omega_m h^2, \Omega_b h^2$	136
4.7	Verosimiglianze bidimensionali nel piano $\log c_s^2 - N_\nu^m$ e nel piano $\Omega_m h^2 - H_0$	138

Elenco delle tabelle

4.1	Valori fiduciali dei parametri cosmologici usati nell'analisi dati	122
4.2	Le quantità rilevanti di WMAP e Planck per i tre canali usati	127
4.3	Incertezze ad 1σ sui parametri cosmologici presi in esame per il modello di energia oscura costante nel tempo	130
4.4	Incertezze ad 1σ sui parametri cosmologici presi in esame per il modello di energia oscura variabile nel tempo	131

Bibliografia

1. W. H. Press A. G. Riess and R. P. Kirshnerr. A precise distance indicator: Type ia supernova multicolor light curve shapes. *arXiv:astro-ph/9604143*, 1996.
2. M. Ishak A. Upadhye and P. J. Steinhardt. Dynamical dark energy: Current constraints and forecasts. *arXiv:astro-ph/0411803*, 2004.
3. Niayesh Afshordi. Integrated Sachs-Wolfe effect in Cross-Correlation: The Observer's Manual. *arXiv:astro-ph/0401166v2*, 2004.
4. M. Arnaud. X-ray observations of galaxies. *arXiv:astro-ph/058159*, 2005.
5. Tommaso Giannantonio Asantha Cooray, Pier Stefano Corasaniti and Alessandro Melchiorri. An indirect limit on the amplitude of primordial Gravitational Wave Background from CMB-Galaxy Cross Correlation. *arXiv:astro-ph/0504290v2*, 2005.
6. Paolo De Bernardis. Dispense del corso di Cosmologia osservativa, 2008.
7. Dino Boccaletti and Giuseppe Pucacco. *Theory of orbits*. Springer verlag, second edition, 2003.
8. Stefano Borgani. Cosmology with clusters of galaxies. *arXiv:astro-ph/0605575*, 2006.
9. S. P. Boughn and R. G. Crittenden. A Detection of the Integrated Sachs-Wolfe Effect. *arXiv:astro-ph/0404470v1*, 2004.
10. Stephen Boughn and Robert Crittenden. A correlation of the cosmic microwave background sky with large scale structure. *arXiv:astro-ph/0305001v1*, 2003.
11. Emory F. Bunn. Calculations of cosmic background radiation anisotropies and implications. *arXiv:astro-ph/9607088v1*, 1996.

12. K. S. Thorne C. W. Misner and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, second edition, 1973.
13. Sean M. Carrol. The cosmological constant. *arXiv:astro-ph/0004075*, 2000.
14. Sean M. Carrol. Dark energy and the Preposterous universe. *arXiv:astro-ph/0107571*, 2001.
15. Sean M. Carrol. Why is the universe accelerating? *arXiv:astro-ph/0310342*, 2003.
16. Asantha Cooray. The Integrated Sachs-Wolfe effect - Large Scale Structure Correlation. *arXiv:astro-ph/0112408v1*, 2001.
17. Asantha Cooray and Daniel Baumann. CMB Polarization towards Clusters as a Probe of the Integrated Sachs-Wolfe Effect. *arXiv:astro-ph/0211095v1*, 2002.
18. Asantha Cooray and Alessandro Melchiorri. Searching For Integrated Sachs-Wolfe Effect Beyond Temperature Anisotropies: CMB E-mode Polarization-Galaxy Cross Correlation. *arXiv:astro-ph/0511054v2*, 2005.
19. R. G. Crittenden and N. Turok. Looking for Λ with the Rees-Sciama Effect. *arXiv:astro-ph/9510072*, 1995.
20. Max Tegmark Daniel J. Eisenstein, Wayne Hu. Cosmic complementarity: joint parameter estimation from CMB experiments and redshift surveys. *arXiv:astro-ph/9807130*, 1998.
21. Amedeo Balbi Davide Pietrobon and Domenico Marinucci. Integrated Sachs-Wolfe effect from the cross correlation of WMAP3 year and the NRAO VLA sky survey data: New results and constraints on dark energy. *arXiv:astro-ph/0606475v2*, 2006.
22. Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
23. Marc Manera Enrique Gaztañaga and Tuomas Multamaki. New light on Dark Cosmos. *arXiv:astro-ph/0407022v4*, 2005.
24. A. G. Riess et al. Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the hubble space telescope: evidence or past deceleration on dark energy evolution. *arXiv:astro-ph/0402512*, 2004.

25. Anais Rassat et al. Cross-correlation of 2MASS and WMAP3: Implications for the ISW effect. *arXiv:astro-ph/0610911v2*, 2007.
26. Anna Cabré et al. Cross-correlation of WMAP 3rd year data and SDSS DR4 galaxy survey: new evidence for Dark Energy. *arXiv:astro-ph/0603690v4*, 2006.
27. Anna Cabré et al. Error analysis in cross-correlation of sky maps: application to the ISW detection. *arXiv:astro-ph/0701393v1*, 2007.
28. C. Maubetsch et al. Cosmology with X-ray cluster baryons. *arXiv:astro-ph/0606602*, 2006.
29. Chris Blake et al. Cosmological baryonic and matter densities from 600000 SDSS Luminous Red Galaxies with photometric redshifts. *arXiv:astro-ph/0605303v2*, 2006.
30. Christopher M. Hirata et al. Cross-correlation of CMB with large-scale structure: weak gravitational lensing. *arXiv:astro-ph/0406004v2*, 2004.
31. D. Clowe et al. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *arXiv:astro-ph/0608407*, 2006.
32. D. Reid et al. The picture of our universe: a view from modern cosmology. *arXiv:astro-ph/0209504*, 2002.
33. E. Komatsu et al. Five-Year WMAP observations: cosmological interpretation. *arXiv:astro-ph/0803.0547v2*, 2008.
34. G. Hinshaw et al. Five-year WMAP observations: data processing, sky maps e basic results. *arXiv:astro-ph/0803.0732v2*, 2008.
35. J. D. McEwen et al. Detection of the ISW effect and corresponding dark energy constraints made with directinal spherical wavelets. *arXiv:astro-ph/0602398v2*, 2007.
36. J. D. McEwen et al. Probing dark energy with steerable wavelets trough correlation of WMAP and NVSS local morphological measures. *arXiv:astro-ph/0704.0626v2*, 2008.
37. J. Dunkley et al. Five-Year WMAP observations: likelihoods and parameters from the WMAP data. *arXiv:astro-ph/0803.0586v2*, 2008.
38. K. M. Górski et al. HEALPix-a Framework for High Resolution Discretization, and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere. *arXiv:astro-ph/0409513v1*, 2004.

39. Laurence Perotto et al. Probing cosmological parameter with the CMB: forecasts for Monte Carlo simulations. *arXiv:astro-ph/0606227v1*, 2006.
40. M. R. Nolta et al. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Dark Energy Induced Correlation with Radio Sources. *arXiv:astro-ph/0305097v1*, 2003.
41. M. R. Nolta et al. Five-Year WMAP observations: Angular Power Spectra. *arXiv:astro-ph/0803.0593v2*, 2008.
42. Michael Blanton et al. The Physical Origin of Scale Dependent Bias in Cosmological Simulations. *arXiv:astro-ph/9807029v2*, 1999.
43. Nikhil Padmanabhan et al. Calibrating Photometric Redshifts of Luminous Red Galaxies. *arXiv:astro-ph/0407594v2*, 2005.
44. P. Astier et al. The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_m , Ω_Λ and w from the First Year Data Set. *arXiv:astro-ph/0510447v1*, 2005.
45. R. E. Smith et al. Stable clustering, the halo model and nonlinear cosmological power spectra. *arXiv:astro-ph/0207664v2*, 2003.
46. Robert H. Becker et al. Evidence for reionization at $z \sim 6$: Detection of a Gunn-Peterson trough in a $z=6.28$ quasar. *Astron. Journal*, 122:2850, 2001.
47. Ryan Scranton et al. Physical Evidence for Dark Energy. *arXiv:astro-ph/0307335v2*, 2003.
48. S. W. Allen et al. Improved constraints on dark energy from Chandra X-ray observations of the largest relaxed galaxy clusters. *arXiv:astro-ph/0706.0033v2*, 2007.
49. Shirley Ho et al. Luminous Red Galaxy Population in Clusters at $0.2 < z < 0.6$. *arXiv:astro-ph/0706.0727v2*, 2007.
50. Shirley Ho et al. Correlation of CMB with large-scale structure: ISW Tomography and Cosmological Implications. *arXiv:astro-ph/0801.0642v1*, 2008.
51. Tommaso Giannantonio et al. A high redshift detection of the Sachs-Wolfe effect. *arXiv:astro-ph/0607572v2*, 2006.
52. Tommaso Giannantonio et al. Combined analysis of the integrated Sachs-Wolfe effect and cosmological implications. *arXiv:astro-ph/0801.4380v2*, 2008.

53. W. L. Freedman et al. Final result from Hubble space telescope key project to measure the Hubble constant. *arXiv:astro-ph/0012376*, 2000.
54. Wayne Hu et al. A complete treatment of CMB anisotropies in a FRW universe. *arXiv:astro-ph/9709066v2*, 1998.
55. Xiaohui Fan et al. Evolution of the ionizing background and the epoch of reionization from the spectra of $z \sim 6$ quasars. *Astron. Journal*, 123:1247-1257, 2002.
56. Gabriella Ferrari. Dispense del corso di introduzione alla relatività generale, 2006.
57. Pablo Fosalba and Enrique Gaztañaga. Measurement of the gravitational potential evolution from the cross-correlation between WMAP and the APM Galaxy survey. *arXiv:astro-ph/0305468v5*, 2004.
58. Peter Coles Francesco Lucchin. *Cosmology: the origin and evolution of cosmic structures*. John Wiley & sons, second edition, 2002.
59. Fernando Atrio-Barandela Germán Olivares and Diego Pavón. The Integrated Sachs-Wolfe Effect in Interacting Dark Energy Models. *arXiv:astro-ph/0801.4517v2*, 2008.
60. Tommaso Giannantonio and Alessandro Melchiorri. Chaplygin gas in light of recent integrated Sachs-Wolfe effect data. *arXiv:astro-ph/0606030v1*, 2006.
61. Tommaso Giannantonio and Robert Crittenden. The effect of reionisation on the CMB-density correlation. *arXiv:astro-ph/0706.0274v1*, 2007.
62. Pietro Giannone. *Elementi di astronomia*. Pitagora editrice, second edition, 2004.
63. Pietro Giannone. *Complementi di astrofisica stellare*. Nuova cultura, 2006.
64. Alessandro Melchiorri et al. Gianpiero Mangano. Present bounds on the relativistic energy density in the Universe from cosmological observables. *arXiv:astro-ph/0612150v2*, 2007.
65. G. Hinshaw. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Temperature Analysis. *arXiv:astro-ph/060345v2*, 2007.

66. <http://map.gsfc.nasa.gov/>.
67. <http://rssd.esa.int/SA/PLANCK/docs/>.
68. <http://www.astro.columbia.edu/~pierste/ISWcode.html>.
69. <http://www.lsst.org/>.
70. Wayne Hu and Ryan Scranton. Measuring Dark Energy Clustering with CMB-Galaxy Correlations. *arXiv:astro-ph/0408456v2*, 2004.
71. Wayne Hu and Naoshi Sugiyama. The small scale integrated Sachs-Wolfe effect. *arXiv:astro-ph/9310046*, 1993.
72. Kazuhide Ichikawa and Tomo Takahashi. On the Determination of Neutrino Masses and Dark Energy Evolution from the Cross Correlation of CMB and LSS. *arXiv:astro-ph/0510849v2*, 2008.
73. Levon Pogosian Jaume Garriga and Tanmay Vachaspati. Forecasting cosmic doomsday from CMB/LSS cross-correlation. *arXiv:astro-ph/0311412v1*, 2003.
74. Enrique Gaztañaga Julien Lesgourgues, Wessel Valkenburg. Constraining neutrino masses with the ISW-galaxy correlation function. *arXiv:astro-ph/0710.5525v3*, 2008.
75. Sergio Pastor Julien Lesgourgues, Laurence Perotto and Michel Piat. Probing neutrino masses with CMB lensing extraction. *arXiv:astro-ph/0511735*, 2006.
76. Masahiro Kawasaki Kazuhide Ichikawa and Fuminobu Takahashi. Constraint on the Effective Number of Neutrino Species from the WMAP and SDSS LRG Power Spectra. *arXiv:astro-ph/0611784v2*, 2007.
77. Ali Kinkhabwala and Marc Kamionkowski. New Constraint on Open Cold-Dark-Matter Models. *arXiv:astro-ph/9808320v3*, 1999.
78. Pier Stefano Corasaniti et al. Levon Pogosian. Tracking Dark Energy with the ISW effect: short and long-term predictions. *arXiv:astro-ph/0506396v2*, 2005.
79. V. Linder and D. Huterer. How many dark energy parameters? *arXiv:astro-ph/0505330*, 2005.

80. Enrique Gaztañaga Marilena LoVerde, Lam Hui. Magnification-Temperature Correlation: the Dark Side of ISW Measurements. *arXiv:astro-ph/0611539v3*, 2007.
81. David N. Spergel Matias Zaldarriaga and Uroš Seljak. Microwave Background Constraints on Cosmological Parameters. *arXiv:astro-ph/9702157v3*, 1997.
82. Alan F. Heavens Max Tegmark, Andy N. Taylor. Karhunen-Loève eigenvalue problems in cosmology: how should we tackle large data sets? *Astrophysical Journal*, 480:22-35, 1997.
83. Alessandro Melchiorri N. Aghanim, P. G. Castro and J. Silk. Cosmic microwave background anisotropies beyond the third peak. *Astronomy & Astrophysics*, 393:381-388, 2002.
84. U. Seljak N. Padmanabhan and U. L. Pen. Mining Weak Lensing Surveys. *arXiv:astro-ph/0210478v1*, 2002.
85. Yeong Shang Loh Niayesh Afshordi and Michael A. Strauss. Cross-correlation of the cosmic microwave background with the 2MASS galaxy survey: signatures of dark energy, hot gas, and point sources. *Physical review D, volume 69:083524*, 2004.
86. R. Opher. Ten major challenges in cosmology. *arXiv:astro-ph/0304369*, 2003.
87. E. Martinez-Gonzales P. Vielva and M. Tucci. Cross-correlation of the CMB and radio galaxies in real, harmonic and wavelet spaces: detection of the ISW effect and dark energy constraints. *arXiv:astro-ph/0408252v2*, 2005.
88. Enrique Gaztañaga Pablo Fosalba and Francisco J. Castander. Detection of the ISW and SZ effects from the CMB-Galaxy correlation. *arXiv:astro-ph/0307249v4*, 2003.
89. Hiranya V. Peiris and David N. Spergel. Cross-correlating the Sloan Digital Sky Survey with the microwave sky. *arXiv:astro-ph/0001393v3*, 2000.
90. Tommaso Giannantonio Pier-Stefano Corasaniti and Alessandro Melchiorri. Constraining dark energy with cross-correlated CMB and Large Scale Structure data. *arXiv:astro-ph/054115v2*, 2005.

91. Levon Pogosian. Integrated Sachs-Wolfe effect in the era of precision cosmology. *arXiv:astro-ph/0606626v1*, 2006.
92. M. J. Rees and D. W. Sciama. *Nature*, 517, 611, 1968.
93. Barbara Ryden. *Introduction to cosmology*. Addison Wesley, 2004.
94. R. G. Crittenden S. Boughn and N. G. Turok. Correlations Between the Cosmic X-ray and Microwave Backgrounds: Constraints on a Cosmological Constant. *arXiv:astro-ph/9704043v1*, 1997.
95. R. Sachs and A. Wolfe. *Astrophysical Journal*, 147:73, 1967.
96. V. Sahni. Dark matter and dark energy. *arXiv:astro-ph/0403324*, 2004.
97. Uroš Seljak and Matias Zaldarriaga. A line of sight integration approach to cosmic microwave background anisotropies. *arXiv:astro-ph/9603033v1*, 1996.
98. P. J. Steinhardt. Quintessential cosmology and cosmic acceleration.
99. R. A. Sunyaev and Ya. Zeldovich. *Astrophysical Sp. Sci.* 7, 3, 1970.
100. R. A. Sunyaev and Ya. Zeldovich. Microwave background radiation as a probe of the contemporary structure and history of the universe. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 18:537-560, 1980.
101. Max Tegmark. How to make maps from CMB data without losing information. *Astrophysical Journal*, 480:L87-L90, 1997.
102. Roberto Trotta and Alessandro Melchiorri. Indication for Primordial Anisotropies in the Neutrino Background from WMAP and SDSS. *arXiv:astro-ph/0412066v2*, 2005.
103. M. S. Turner. Dark matter and energy in the universe. *arXiv:astro-ph/9901109*, 1999.
104. M. S. Turner. Dark matter and energy in the universe. *arXiv:astro-ph/9901109*, 1999.
105. Martin White and Wayne Hu. The Sachs-Wolfe effect. *arXiv:astro-ph/9609105v1*, 1996.
106. Matias Zaldarriaga and Uroš Seljak. All-sky analysis of polarization in the microwave background. *Physical review D, volume 55, number 4*, 1997.

107. Wayne Hu Zhaoming Ma and Dragan Huterer. Effects of photometric redshift uncertainties on weak lensing tomography. *arXiv:astro-ph/0506614v2*, 2005.