# I esonero di Elettricità e Magnetismo

Proff. Lacava, Mariani, Ricci

A.A. 2006/2007

23 Febbraio 2007

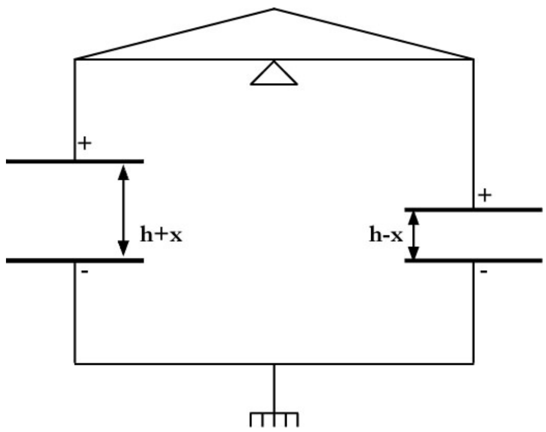
1. Sia data una sfera di raggio $R = 50\ cm$ avente una densità di carica $\rho(r) = \ \alpha r$ e carica totale $Q = 1.0 \cdot 10^{-6} C$.

    a. Determinare il valore della costante $\alpha$;
    b. Determinare l'andamento del campo elettrico in funzione della distanza dal centro della sfera (all'interno e all'esterno della sfera). Calcolarne il valore sulla superficie.
    c. Determinare l'energia elettrostatica generata in tutto lo spazio dalla distribuzione di carica.

    Una particella con carica $q = 1.0 \cdot 10^{-12} C$ di massa $m = 1.0 \cdot 10^{-6}\ kg$ viene sparata da distanza $r >> R$ con velocità iniziale $v_o$ verso il centro della sfera

    d. Determinare il valore minimo di $v_o$ per cui la carica puntiforme raggiunge la superficie della sfera.

2. Le armature superiori di due condensatori piani costituiscono i piatti di una bilancia il cui giogo è un conduttore. Le armature inferiori sono fisse ed elettricamente a terra. Per entrambi i condensatori, le armature hanno la stessa massa, area $\mathrm{S} = 6.50 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m}^2$, e in assenza di cariche le armature superiori all'equilibrio si trovano a distanza $\mathrm{h} = 6.50\ \mathrm{mm}$ dalle inferiori. Si porta il sistema in posizione $\mathrm{h}_1 = \mathrm{h} + \mathrm{x}$ e $\mathrm{h}_2 = \mathrm{h} - \mathrm{x}$ con $\mathrm{x} = 8.00 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{mm}$ e lo si carica a $\mathrm{V_o} = 8.00\ \mathrm{kV}$. Il generatore viene poi staccato e il sistema lasciato libero di muoversi fino a che $\mathrm{x} = 3.00\ \mathrm{mm}$. In questa posizione calcolare:
    a. la differenza di potenziale ai capi del sistema;
    b. le cariche $\mathrm{q}_1$ e $\mathrm{q}_2$ dei due condensatori;
    c. la risultante delle forze elettrostatiche sulle armature superiori;
    d. il lavoro nel passaggio dalla posizione iniziale ($\mathrm{x} = 8.00 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{mm}$) a quella finale ($\mathrm{x} = 3.00\ \mathrm{mm}$).



# Soluzioni

Esercizio 1.

a) Calcoliamo la carica totale della distribuzione sferica in funzione di α:

$$Q = \int_0^R \rho\,(r) 4\,\pi\, r^2\, dr = 4\pi\alpha \int_0^R r^3\, dr = \pi\alpha R^4$$

da cui otteniamo

$$\alpha = \frac{Q}{\pi R^4} = 5.1 \cdot 10^{-6} \quad C/m^4$$

b) Per il calcolo del campo elettrico sfruttiamo il teorema di Gauss applicato a superfici sferiche di raggio r, per cui calcolata la carica contenuta nel volume racchiuso da tali superfici si ottiene:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\frac{r^2}{R^4} \ \text{ per } r \le R \ \text{ e } \ E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\frac{1}{r^2} \ \text{ per } \ r > R$$

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\frac{1}{R^2} = 3.6 \cdot 10^4 \qquad V/m$$

c) Per il calcolo dell'energia sfruttiamo il campo elettrico calcolato al punto precedente:

$$\begin{aligned} U = \int \frac{1}{2}\epsilon_o\, E(r)^2\, d\tau = \frac{\epsilon_o}{2}\left[\int_0^R E(r)^2\, d\tau + \int_R^\infty E(r)^2\, d\tau\right] \\ = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{(4\pi)^2\epsilon_o}\left[\int_0^R \frac{r^4}{R^8} 4\,\pi\, r^2\, dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^4} 4\,\pi\, r^2\, dr\right] = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_o}\frac{1}{R}\left[\frac{1}{7}+1\right] \\ = 1.0 \cdot 10^{-2}\, J \end{aligned}$$

d) La particella raggiungerà la sfera se l'energia cinetica iniziale è almeno pari alla differenza di energia potenziale elettrostatica tra l'infinito e la superficie della sfera: $K \geq q\ [V(R) - V(\infty)]$

dove

$$V(R) - V(\infty) = -\int_\infty^R E(r) \cdot\, dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{Q}{R}\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R}$$

e quindi

$$\frac{1}{2} m v_o^2 \geq \frac{q\, Q}{4\pi\epsilon_o R}$$

$$v_o \geq \sqrt{\frac{q\, Q}{2\pi\epsilon_o R}\frac{1}{m}} = 1.9 \cdot 10^{-1}\, m/s$$

Esercizio 2.

Le due capacità si scrivono:

$$C_1(x) = \frac{\epsilon_o S}{h+x} \text{ e } C_2(x) = \frac{\epsilon_o S}{h-x}$$

La capacità totale del sistema è data dal parallelo di $C_1$ e $C_2$ :

$$C_{tot}(x) = \frac{\epsilon_o S}{h+x} + \frac{\epsilon_o S}{h-x} = \frac{2\,\epsilon_o S\,h}{h^2 - x^2}$$

ricaviamo la carica $Q_o$ dallo stato iniziale trovando:

$$Q_{tot} = C_{tot}(x_{in})V_o = 1.44 \cdot 10^{-5}\ C$$

Lo spostamento successivo avviene a carica costante; le capacità variano fino allo stato finale per si cui si ottengono i seguenti valori:

$$C_1^{fin} = C_1(x_{fin}) = 6.06 \cdot 10^{-10}\ F$$
$$C_2^{fin} = C_2(x_{fin}) = 1.64 \cdot 10^{-9}\ F$$
$$C_{tot}^{fin} = C_{tot}(x_{fin}) = 2.25 \cdot 10^{-9}\ F$$

a. $V_{fin} = \frac{Q_{tot}}{C_{tot}(x_{fin})} = 6.40\ kV$
b. $Q_1^{fin} = C_1^{fin} V_{fin} = 3.88 \cdot 10^{-6}\ C$ e $Q_2^{fin} = C_2^{fin} V_{fin} = 1.05 \cdot 10^{-5}\ C$
c. Poiché il sistema è isolato e la carica totale si conserva calcoliamo la risultante delle forze elettriche derivando l'energia totale del sistema rispetto a $x$ e cambiandola di segno:

$$F_2 - F_1 = -\frac{\partial W_{tot}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{Q_{tot}^2}{C_{tot}(x)}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q_{tot}^2}{\epsilon_o S}\frac{x}{h}$$

per cui, nella posizione finale si ha:

$$F_2 - F_1 = 8.29\ N$$

d. Infine, essendo il processo a carica costante, il lavoro totale è:

$$L = -\Delta W = -W_{fin} + W_{in} = -\frac{1}{2}\frac{Q_{tot}^2}{C_{tot}^{fin}} + \frac{1}{2}\frac{Q_{tot}^2}{C_{tot}^{in}} = \frac{Q_{tot}^2}{4\varepsilon_o S\,h}(x_{fin}^2 - x_{in}^2) = 1.16\ \cdot 10^{-2}\ J$$