Primo compito di esonero del Corso di Elettromagnetismo A.A. 2004/2005

20 Maggio 2005

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, D. Trevese)

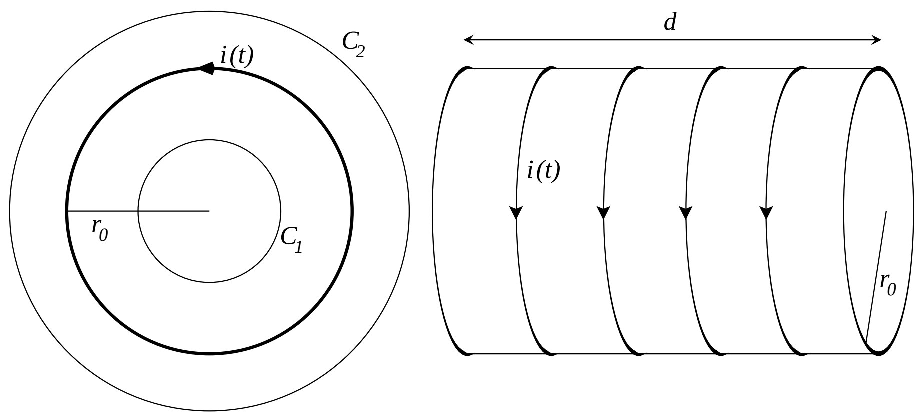
Esercizio 1

Un solenoide di raggio $r_0 = 3$ cm e lunghezza $d = 100$ cm è costituito da $N = 5 \cdot 10^4$ spire percorse da corrente variabile nel tempo secondo la legge $i(t) = i_0\ e^{-t/\tau}$, con $i_0 = 50$ A e $\tau = 5$ s. Si consideri una spira circolare di generico raggio r e resistenza $R = 0.5\ \Omega$ con piano perpendicolare all'asse del solenoide e centro su tale asse. Nell'approssimazione di solenoide indefinito e trascurando gli effetti di autoinduzione della spira, determinare:

1) l'espressione, in funzione del raggio r, della corrente i' indotta nella spira (specificandone il verso) valida per valori $r < r_0$ (spira C_1 interna al solenoide); si calcoli il valore di tale corrente nel caso $r = 1$ cm al tempo $t = 1$ s;

2) l'espressione, in funzione del raggio r, della corrente i' indotta nella spira (specificandone il verso) valida per valori $r > r_0$ (spira C_2 esterna al solenoide);

3) l'energia totale $\mathcal{E}$ dissipata per effetto Joule a partire dal tempo $t = 0$ nella spira interna di raggio $r = 1$ cm e in una spira esterna di raggio $r > r_0$.



Esercizio 2

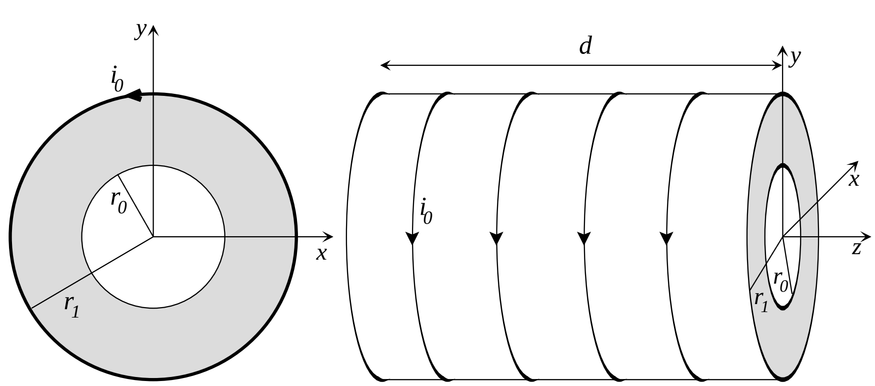
Un solenoide lungo $d = 100$ cm è costituito da $N = 10^4$ spire percorse da corrente $i_0 = 1$ A avvolte su un cilindro cavo di raggio interno $r_0 = 1$ cm e raggio esterno $r_1 = 2$ cm composto da un materiale ferromagnetico con permeabilità magnetica relativa costante $\mu_r = 70$. Nell'approssimazione di solenoide indefinito, determinare:

1) i valori di B, H ed M nel ferromagnete e nel vuoto internamente al solenoide;

2) i valori delle correnti amperiane di superficie e di volume presenti nel ferromagnete;

3) l'espressione delle densità di corrente amperiana di superficie e di volume nel caso in cui il materiale ferromagnetico sia non omogeneo, descritto da una permeabilità magnetica relativa della forma $\mu_r = \alpha r^2 = \alpha(x^2 + y^2)$, con $\alpha = 50\ \mathrm{cm}^{-2}$;

4) i valori delle correnti amperiane di superficie e di volume nel materiale ferromagnetico nelle condizioni del punto 3).



Soluzione Esercizio 1

Nell'approssimazione di solenoide indefinito il campo di induzione magnetica $\mathbf{B_0}$ è nullo all'esterno del solenoide ed uniforme diretto parallelamente all'asse all'interno, di modulo variabile nel tempo $B_0(t) = (\mu_0 N/d) i(t)$.

1) Il flusso di $\mathbf{B_0}$ concatenato con una spira C_1 di raggio r interna al solenoide è

$$\Phi(\mathbf{B_0}) = B_0 \pi r^2 = \frac{\mu_0 N \pi r^2}{d}\ i(t)\ .$$

La corrente i' indotta nella spira è data da $i' = f_i/R$, dove f_i è la forza elettromotrice indotta data dalla legge di Faraday-Neumann $f_i = -d\Phi/dt$:

$$i'(r,t) = \frac{\mu_0 N \pi r^2 i_0}{R d \tau} e^{-t/\tau}\ .$$

Il verso è determinato dalla legge di Lenz (si oppone alla variazione di flusso del campo $\mathbf{B_0}$), e poichè il flusso diminuisce deve essere tale da generare un campo nello stesso verso di $\mathbf{B_0}$, quindi i' risulta nello stesso verso di i. Per i valori $r = 1$ cm e $t = 1$ s si ottiene il valore

$$i' \simeq\ 3.23 \cdot 10^{-4}\ \text{A}\ .$$

2) Il flusso di $\mathbf{B_0}$ concatenato con una spira C_2 di raggio r esterna al solenoide è ora indipendente da r (il campo è nullo esternamente al solenoide)

$$\Phi(\mathbf{B_0}) = B_0 \pi r_0^2 = \frac{\mu_0 N \pi r_0^2}{d}\ i(t)\ .$$

La corrente i' indotta nella spira è pertanto indipendente dal raggio r:

$$i'(t) = \frac{\mu_0 N \pi r_0^2 i_0}{R d \tau} e^{-t/\tau}\ .$$

3) L'energia totale dissipata per effetto Joule dalla spira è data dall'espressione

$$\mathcal{E} = \int_0^{\infty} dt\ R\ i'^2(t)\ .$$

Svolgendo l'integrale si ottiene per la spira interna C_1 di raggio $r = 1$ cm

$$\mathcal{E} = \left(\frac{\mu_0 N \pi i_0 r^2}{d}\right)^2 \frac{1}{2R\tau} \simeq\ 1.95 \cdot 10^{-7}\ \text{J}\ .$$

Per la spira esterna C_2 si ottiene, indipendentemente dal raggio r della spira,

$$\mathcal{E} = \left(\frac{\mu_0 N \pi i_0 r_0^2}{d}\right)^2 \frac{1}{2R\tau} \simeq\ 1.58 \cdot 10^{-5}\ \text{J}\ .$$

Soluzione Esercizio 2

1) Nell'approssimazione di solenoide indefinito i campi sono nulli all'esterno del solenoide e diretti lungo z all'interno. Il campo $\mathbf{H}$ si ottiene dal teorema della circuitazione di Ampère

$$\begin{array}{lll} H_0 = Ni/d \simeq 10^4 \text{ A/m} & & \text{(nel vuoto)} \\ H = H_0 \simeq 10^4 \text{ A/m} & & \text{(nel ferromagnete)} \end{array}$$

Il campo $\mathbf{B}$ si ottiene dalla relazione $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$:

$$\begin{array}{lll} B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 Ni/d \simeq 1.26 \cdot 10^{-2} \text{ T} & & \text{(nel vuoto)} \\ B = \mu_0\mu_r H = \mu_0\mu_r Ni/d \simeq 0.88 \text{ T} & & \text{(nel ferromagnete)} \end{array}$$

Il vettore di magnetizzazione $\mathbf{M}$ si ottiene dalla relazione $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu_r - 1)\mathbf{H}$:

$$\begin{array}{lll} M_0 = 0 & & \text{(nel vuoto)} \\ M = (\mu_r - 1)H = (\mu_r - 1)Ni/d \simeq 6.9 \cdot 10^5 \text{ A/m} & & \text{(nel ferromagnete)} \end{array}$$

2) Le correnti amperiane si ottengono dalle relazioni: $\mathbf{J}_s = \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}$ per la densità di corrente superficiale e $\mathbf{J}_v = \nabla \wedge \mathbf{M}$ per la densità di corrente di volume. Nel caso di materiale omogeneo $\mathbf{J}_v = 0$ e

$$\begin{array}{lll} i_s^e = J_s^e d = Md \simeq 6.9 \cdot 10^5 \text{ A} & \text{e verso come } i_0 & \text{(sulla superficie esterna)} \\ i_s^i = J_s^i d = Md \simeq 6.9 \cdot 10^5 \text{ A} & \text{e verso opposto ad } i_0 & \text{(sulla superficie interna)} \end{array}$$

3) Nel caso di mezzo non omogeneo (nel caso in esame μ_r e quindi $M = (\mu_r - 1)H$ dipendono dalla distanza r dall'asse del solenoide: $\mu_r(r) = \alpha r^2$) si hanno ancora correnti amperiane di superficie, la cui densità è

$$\begin{array}{lll} J_s^e = M(r_1) = (\alpha r_1^2 - 1)H & \text{e verso come } i_0 & \text{(sulla superficie esterna)} \\ J_s^i = M(r_2) = (\alpha r_0^2 - 1)H & \text{e verso opposto ad } i_0 & \text{(sulla superficie interna)} \end{array}$$

ed anche una corrente amperiana di volume, la cui densità è $\mathbf{J}_v = \nabla \wedge \mathbf{M}$:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{J}_v = 2\alpha H(y\hat{x} - x\hat{y}) & & \text{(in coordinate cartesiane)} \\ \mathbf{J}_v = -2\alpha H r\hat{\varphi} & & \text{(in coordinate cilindriche)} \end{array}$$

tangente alle circonferenze coassiali con il cilindro e circolante in verso opposto a i_0.

4) Le correnti amperiane di superficie sono date da

$$\begin{array}{lll} i_s^e = J_s^e d = (\alpha r_1^2 - 1)Hd \simeq 1.99 \cdot 10^6 \text{ A} & & \text{(sulla superficie esterna)} \\ i_s^i = J_s^i d = (\alpha r_0^2 - 1)Hd \simeq 4.9 \cdot 10^5 \text{ A} & & \text{(sulla superficie interna)} \end{array}$$

La corrente amperiana di volume si ottine dal flusso di $\mathbf{J}_v$ attraverso una sezione rettangolare del cilindro ferromagnetico

$$i_v = \int_S \mathbf{J}_v \cdot \mathbf{n} dS = 2\alpha H d \int_{r_0}^{r_1} dr\ r = \alpha H d(r_1^2 - r_0^2)$$

come si ottiene anche, per il teorema di Stokes, dalla circuitazione di $\mathbf{M}$ lungo il perimetro ℓ della sezione rettangolare

$$i_v = \oint_\ell \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = [M(r_1) - M(r_0)]d = \alpha H d(r_1^2 - r_0^2)$$

Numericamente

$$i_v \simeq 1.5 \cdot 10^6 \text{ A} .$$

Si noti che il contributo totale delle correnti amperiane è nullo (tenendo conto dei versi di percorrenza $i_s^e - i_s^i - i_v = 0$), come ci si poteva aspettare dovendo essere il campo $\mathbf{B_0}$ nel vuoto al centro del solenoide indipendente dalle caratteristiche del materiale e quindi dalle correnti amperiane ($B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 Ni/d$) e considerando che la circuitazione di $\mathbf{B_0}$ lungo un percorso concatenato con il cilindro è legato alla corrente totale (correnti macroscopiche più amperiane) attraverso la superficie delimitata dal percorso.