Prova scritta di Elettricità e Magnetismo ed Elettromagnetismo A.A. 2006/2007

6 Settembre 2007

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, F. Ricci, D. Trevese)

Modalità

- Prova scritta di Elettricità e Magnetismo: Esercizi 1 e 2 (3 ore)
- Prova scritta di Elettromagnetismo: Esercizi 3 e 4 (3 ore)
- Prova scritta di Elettricità e Magnetismo e di Elettromagnetismo: Esercizi 1, 3 e 4 (4 ore)

Esercizio 1

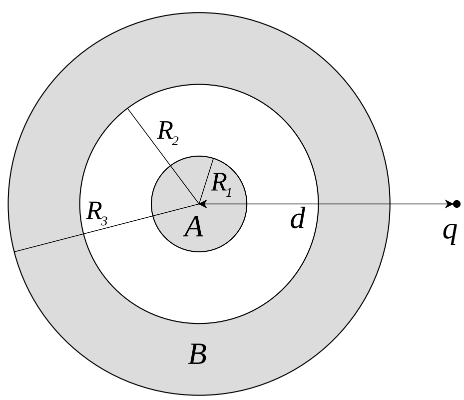
Un conduttore cilindrico A di raggio $R_1 = 0.5$ cm ed altezza $h = 1.0$ m si trova all'interno di uno strato conduttore cilindrico B di raggio interno $R_2 = 2.0$ cm, raggio esterno $R_3 = 3.0$ cm ed altezza h (nella figura viene mostrata una sezione perpendicolare all'asse dei cilindri). Il conduttore A ha carica totale $Q_A = 4.0 \cdot 10^{-9}$ C ed il conduttore B carica totale Q_B. Determinare

a) la differenza di potenziale tra i due conduttori;

b) l'energia elettrostatica immagazzinata nello spazio tra i due conduttori;

c) la carica Q_e(in modulo e segno) sulla superficie esterna del conduttore B, sapendo che il lavoro necessario ad allontanare di un tratto $\delta = 10^{-3}$ cm una carica $q = 3.0 \cdot 10^{-12}$ C posta a distanza $d = 10$ cm dall'asse dei cilindri vale $L = 6.0 \cdot 10^{-14}$ J (si trascurino gli effetti induttivi di tale carica sul cilindro conduttore);

d) la carica totale Q_B (in modulo e segno) sul conduttore B.



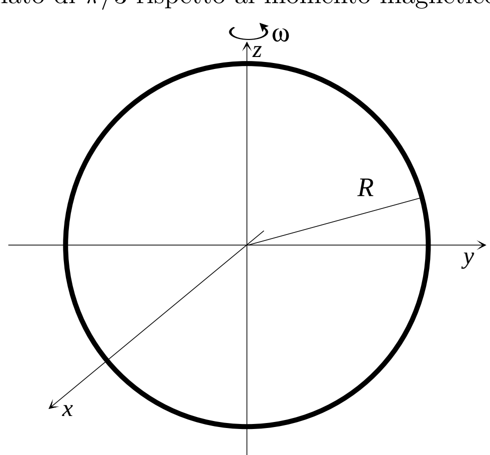
Esercizio 2

Una sottile superficie sferica isolante di raggio $R = 1.0$ m ha carica superficiale $\sigma = 9.0 \cdot 10^{-8}$ C/m^2. La superficie viene fatta ruotare attorno ad un suo diametro con velocità angolare costante $\omega = 3.0 \cdot 10^3$ rad/s. Determinare

a) il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}_o$ (in modulo, direzione e verso) nel centro della superficie sferica;

b) il momento magnetico della superficie sferica, specificando modulo, direzione e verso;

c) l'energia magnetica del sistema quando viene immerso in un campo di induzione magnetica costante ed uniforme di modulo $B = 2.0 \cdot 10^{-6}$ T inclinato di $\pi/3$ rispetto al momento magnetico della superficie sferica.



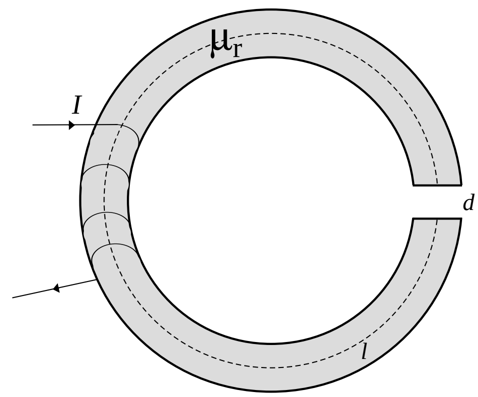
Esercizio 3

Un elettromagnete è costituito da un circuito magnetico toroidale di materiale ferromagnetico (di lunghezza media $l = 1.2$ m ed avente sezione circolare $S \ll l^2$) ed un sottile traferro di spessore $d = 2$ mm. Sul circuito magnetico sono avvolte $N = 1000$ spire in cui viene fatta circolare una corrente $I = 20$ A. La permeabilità magnetica relativa del ferromagnete, nelle condizioni di lavoro, è $\mu_r = 500$. Il traferro viene riempito con un disco di materiale diamagnetico la cui suscettività è $\chi = -5.0 \cdot 10^{-3}$.
Si calcolino:

a) il campo magnetico **H**, l'induzione **B** e la magnetizzazione **M** nel circuito magnetico e nel traferro, prima dell'introduzione del disco diamagentico, specificando intensità, direzione e verso;

b) i campi **H**, **B**, ed **M** nel ferromagnete e nel diamagnete quando il disco riempie il traferro, specificando intensità, direzione e verso;

c) il valore delle correnti amperiane che circolano nel ferro e nel disco, specificandone la direzione ed il verso rispetto al campo di induzione magnetica **B**.



Esercizio 4

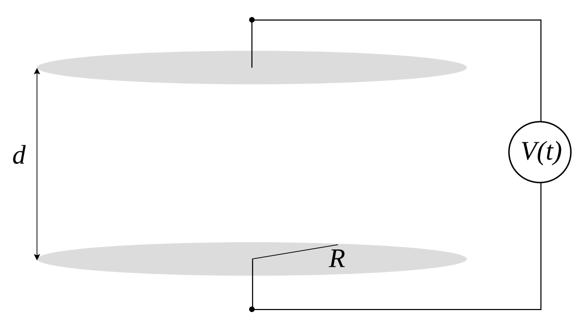
Un condensatore piano con armature circolari di raggio $R = 20$ cm, distanti $d = 2.0$ cm, è collegato mediante un circuito di resistenza trascurabile a un generatore di forza elettromotrice $V(t) = V_o \sin(\omega t)$ di resistenza interna trascurabile, con $V_o = 10$ V e $\omega = 1.0$ rad/s. Trascurando gli effetti di bordo, si determinino in modulo, all'istante di tempo $t^* = 1.0$ s

a) il campo di induzione magnetica B_i in un punto interno al condensatore, a distanza $r_i = 10$ cm dall'asse;

b) il campo di induzione magnetica B_e in un punto esterno al condensatore, a distanza $r_e = 50$ cm dall'asse;

c) l'energia elettrostatica immagazzinata all'interno del condensatore;

d) l'energia magnetica immagazzinata all'interno del condensatore.



Soluzione Esercizio 1

a) Per induzione sulla superficie interna del guscio si ha carica $-Q_A$. La capacità del condensatore cilindrico è $C = 2\pi\epsilon_o h/\ln(R_2/R_1)$, per cui la differenza di potenziale tra i due conduttori è:

$$\Delta V = \frac{Q_A}{C} = \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o h} \ln \frac{R_2}{R_1} \simeq 99.7 \text{ V} .$$

---

b) L'energia immagazzinata nel condensatore cilindrico è

$$U = \frac{Q_A^2}{2C} = \frac{Q_A^2}{4\pi\epsilon_o h} \ln \frac{R_2}{R_1} \simeq 1.99 \cdot 10^{-7} \text{ J} .$$

---

c) Sulla superficie interna del guscio si ha carica $-Q_A$ e, poichè il conduttore B ha carica totale Q_B, sulla sua superficie esterna sarà presente una carica $Q_e = Q_A + Q_B$. Il campo all'esterno dei cilindri è radiale e vale $E(r) = Q_e/2\pi\epsilon_o hr$, pertanto la differenza di potenziale tra due punti è $V(r_1) - V(r_2) = (Q_e/2\pi\epsilon_o h) \ln r_2/r_1$. Il lavoro fatto per spostare la carica q da d e $d+\delta$ si può scrivere come

$$L = \int_d^{d+\delta} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_{ext} = -q \int_d^{d+\delta} dr\ E = -q[V(d) - V(d+\delta)] = -\frac{qQ_e}{2\pi\epsilon_o h} \ln \frac{d+\delta}{d} \simeq -\frac{qQ_e}{2\pi\epsilon_o h} \frac{\delta}{d} ,$$

(dove si è fatto uso del fatto che $\delta/d \ll 1$ e quindi $\log(1+\delta/d) \simeq \delta/d$ e della relazione $\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}_{el} = -q\mathbf{E}$) da cui si ottiene

$$Q_e = -\frac{L\ 2\pi\epsilon_o h}{q \ln \frac{d+\delta}{d}} \simeq -\frac{L\ 2\pi\epsilon_o hd}{q\delta} \simeq -\ 1.11 \cdot 10^{-8} \text{ C} ,$$

con segno negativo (come era anche deducibile dal fatto che bisogna compiere lavoro per allontanare dal conduttore una carica positiva).

---

d) La carica totale posseduta dal cilindro esterno è

$$Q_B = Q_e - Q_A \simeq -\ 1.51 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Soluzione Esercizio 2

a) Consideriamo la porzione di superficie sferica tra due piani perpendicolari all'asse di rotazione ad altezza z e $z + dz$. Quando la sfera ruota, alla porzione di carica $dQ = \sigma dS = 2\pi R^2 \sigma \sin\theta d\theta$ depositata su questa striscia infinitesima è associata una corrente elettrica $di = (\omega/2\pi)dQ = \sigma\omega R^2 \sin\theta d\theta$ dove θ è l'angolo al centro della sfera definito dall'asse di rotazione z e dal raggio che individua la striscia sulla sfera stessa. Il contributo della striscia di corrente al campo di induzione magnetica al centro della sfera è equivalente a quello di un campo generato da una spira (di raggio $r = R\sin\theta$ e percorsa dalla corrente di) in un punto del suo asse distante z dal suo centro. Tale campo ha un'unica componente diretta lungo l'asse di rotazione z

$$dB_o = \frac{1}{2}\frac{\mu_o r^2 di}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{\mu_o \sin^2\theta}{R} di = \frac{1}{2}\mu_o \omega R \sigma \sin^3\theta d\theta$$

Ne segue che integrando su tutta la sfera ($0 \leq \theta \leq \pi$) risulta

$$B_o = \frac{2}{3}\mu_o \sigma \omega R \simeq\ 2.26 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{T}$$

---

b) Per calcolare il momento magnetico della sfera carica rotante ragioniamo in maniera analoga applicando il teorema di equivalenza di Ampère. Ciascuna spira infinitesima contribuisce al momento magnetico per un fattore dato da $dm = \pi r^2 di = \pi\omega R^4 \sigma \sin^3\theta d\theta$ (diretto lungo z con verso positivo), per cui, integrando su tutta la sfera ($0 \leq \theta \leq \pi$), si ottiene il momento magnetico totale

$$m = \frac{4}{3}\pi\sigma\omega R^4 \simeq\ 1.13 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Am}^2$$

---

c) L'energia magnetica è

$$U = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B} = -mB\cos\pi/3 = -\frac{mB}{2} \simeq -\ 1.13 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{J}$$

Soluzione Esercizio 3

a) Utilizzando il teorema della circuitazione di Ampère si ha $H_1 l + H_o d = NI$, con H_1 campo entro il ferromagnete e H_o nel vuoto. Dalla condizione di raccordo $B_1 = B_o \doteq B$ e dalle relazioni $B_1 = \mu_o \mu_r H_1$ e $B_o = \mu_o H_o$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_o \mu_r N I}{\mu_r d + l} \simeq 5.71 \text{ T} \\
H_0 &= \frac{\mu_r N I}{\mu_r d + l} \simeq 4.55 \cdot 10^6 \text{ A/m} \\
H_1 &= \frac{N I}{\mu_r d + l} \simeq 9.09 \cdot 10^3 \text{ A/m} \\
M_1 &= (\mu_r - 1) H_1 \simeq 4.54 \cdot 10^6 \text{ A/m}
\end{aligned}
$$

Le direzioni di tali vettori sono tangenti alla circonferenza passante nel toro con verso orario (dato il verso della corrente indicato in figura).

---

b) Ripetendo lo stesso ragionamento di prima si ha (indichiamo con $\mu_r^{dia} = 1 + \chi$ la permeabilità magnetica del diamagnete)

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_o \mu_r \mu_r^{dia} N I}{\mu_r d + \mu_r^{dia} l} \simeq 5.70 \text{ T} \\
H^{dia} &= \frac{\mu_r N I}{\mu_r d + \mu_r^{dia} l} \simeq 4.56 \cdot 10^6 \text{ A/m} \\
H_1 &= \frac{\mu_r^{dia} N I}{\mu_r d + \mu_r^{dia} l} \simeq 9.07 \cdot 10^3 \text{ A/m} \\
M^{dia} &= (\mu_r^{dia} - 1) H^{dia} \simeq -2.28 \cdot 10^4 \text{ A/m} \\
M_1 &= (\mu_r - 1) H_1 \simeq 4.53 \cdot 10^6 \text{ A/m}
\end{aligned}
$$

I versi sono gli stessi di prima, ora però c'è un vettore di magnetizzazione anche nel diamagnete, con verso opposto ad $\mathbf{H}$.

---

c) Le correnti amperiane di superficie si ottengono dalla relazione $\mathbf{J}_s = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$. Quindi

$$
\begin{aligned}
i_a^{fer} &= l M_1 \simeq 5.44 \cdot 10^6 \text{ A} \\
i_a^{dia} &= d M^{dia} \simeq -45.6 \text{ A}
\end{aligned}
$$

con i_a^{fer} circolante nello stesso verso di I (in senso antiorario vista da $\mathbf{B}$) e i_a^{dia} in verso opposto (in senso orario).

Soluzione Esercizio 4

a) Trascurando gli effetti di bordo, il campo elettrico all' interno del condensatore può essere considerato costante e ricavato semplicemente da V

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_o \sin(\omega t)}{d} \tag{1}$$

La corrente di spostamento associata a questo campo elettrico dà luogo ad un campo di induzione magnetica. Considerazioni di simmetria ci portano a dedurre che le linee di campo di questo campo di induzione magnetica formano dei cerchi attorno all'asse del condensatore. Per calcolare il campo di induzione magnetica B_i ad una distanza r_i ($< R$) dall'asse possiamo quindi utilmente considerare la circuitazione di B_i su una linea circolare di raggio r_i concentrica all'asse del condensatore:

$$2\pi r_i B_i = \epsilon_o \mu_o \int_0^{r_i} \frac{\partial}{\partial t} \frac{V_o \sin(\omega t)}{d} 2\pi r dr \tag{2}$$

ovvero, all'istante t^*,

$$B_i = \epsilon_o \mu_o \frac{V_o \omega \cos(\omega t^*)}{d} \frac{r_i}{2} = 1.50 \cdot 10^{-16} T \tag{3}$$

b) Per il calcolo del campo B_e si può procedere analogamente ma la circuitazione va fatta su una linea circolare di raggio r_e ($> R$) e si deve tener conto del fatto che il campo elettrico (sempre trascurando effetti di bordo) è nullo all'esterno del condensatore e quindi il suo flusso sulla superficie delimitata dalla linea circolare di raggio r_e riceve contributi non nulli solo sulla intersezione tra quella superficie ed il volume tra le facce del condensatore

$$2\pi r_e B_e = \epsilon_o \mu_o \int_0^{R} \frac{\partial}{\partial t} \frac{V_o \sin(\omega t)}{d} 2\pi r dr \tag{4}$$

da cui si ottiene

$$B_e = \epsilon_o \mu_o \frac{V_o \omega \cos(\omega t^*)}{d} \frac{R^2}{2 r_e} = 1.20 \cdot 10^{-16} T \tag{5}$$

c) L'energia elettrostatica totale U_E si calcola, tenendo presente che il campo elettrico è uniforme all'interno del condensatore e (sempre grazie all'ipotesi di effeti di bordo trascurabili) nullo all'esterno del condensatore. Moltiplicando la densità di energia elettrostatica per il volume $\pi R^2 d$ del condensatore si trova il risultato

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_o \frac{V^2}{d^2} \pi R^2 d = \frac{1}{2} \epsilon_o \frac{V_0^2 \sin^2(\omega t^*)}{d} \pi R^2 = 1.97 \cdot 10^{-9} J \tag{6}$$

d) L'energia magnetica immagazzinata all'interno del condensatore è descritta dal seguente integrale

$$U_B = \int_0^R \frac{1}{2\mu_0} B^2 d 2\pi r dr \tag{7}$$

che, tenendo presente l'andamento del campo B all'interno del condensatore,

$$B = \epsilon_o \mu_o \frac{V_o \omega \cos(\omega t^*)}{2d} r \tag{8}$$

ci porta al risultato

$$U_B = \epsilon_o^2 \mu_o \frac{\pi R^4 V_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t^*)}{16 d} = 4.51 \cdot 10^{-29} J \tag{9}$$