Secondo compito di esonero del Corso di Elettromagnetismo A.A. 2006/2007

22 Giugno 2007

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, D. Trevese)

Esercizio 1

Una spira quadrata di lato $l = 2$ mm costituita da $N = 1000$ avvolgimenti percorsi da corrente $i_1 = 3$ A si trova al centro di un un circuito rettangolare di lati $d = 10$ cm e $h \gg d$ percorso da corrente $i_2 = 5$ A, concorde a i_1. La spira quadrata può ruotare attorno all'asse x (passante per il centro e parallelo a due suoi lati) e sia θ l'angolo tra la sua normale $\mathbf{n}_1$ e la normale $\mathbf{n}_2$ al piano del circuito rettangolare. Le correnti i_1 e i_2 sono mantenute costanti con opportuni generatori.

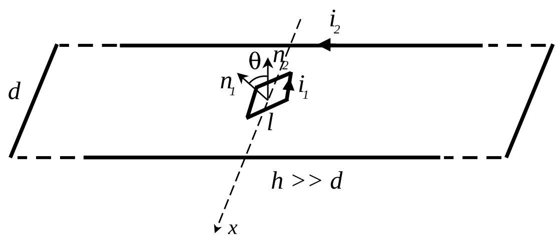
Nell'approssimazione $l \ll d$ determinare

a) l'espressione del coefficiente di mutua induzione $\mathcal{M}$ tra i due circuiti in funzione di θ;

b) l'espressione del momento M delle forze magnetiche (rispetto all'asse x) che agisce sulla spira, specificandone il valore nel caso $\theta = \pi/4$;

Nel caso in cui i due circuiti siano complanari ($\theta = 0$), determinare

c) l'errore relativo commesso nell'approssimazione $l \ll d$ usata nel calcolo di $\mathcal{M}$ (ossia nell'aver considerato uniforme il campo nell'area delimitata dalla spira quadrata).



Esercizio 2

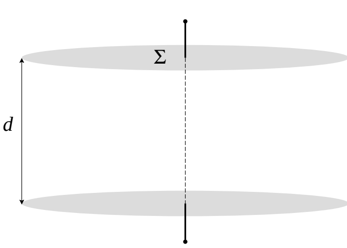
Su un condensatore piano nel vuoto con armature circolari di area $\Sigma = 20$ cm^2 distanti $d = 2$ mm, inizialmente scarico, viene depositata carica elettrica a tasso costante $I = 10^{-12}$ C/s per un tempo $t = 10$ s.
Determinare, durante il processo di carica del condensatore

a) l'espressione del campo elettrico $\mathbf{E}$ all'interno del condensatore in funzione del tempo (specificandone il valore finale) e la corrente di spostamento I_s - in modulo, direzione e verso (rispetto al campo $\mathbf{E}$) - all'interno del condensatore;

b) l'espressione del campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ e del vettore di Poynting $\mathbf{S}$ (indicandone direzione e verso) all'interno del condensatore, in funzione della distanza r dall'asse;

c) l'espressione dell'energia elettromagnetica contenuta in una regione cilindrica di altezza d e raggio r_0 minore del raggio delle armature del condensatore e centrata sull'asse di questo;

d) il flusso del vettore di Poynting in funzione del tempo attraverso la superficie della regione cilindrica descritta al punto c), specificandone il valore al tempo $t = 4$ s nel caso in cui $r_0 = 1$ cm.



Soluzione Esercizio 1

a) Per trovare $\mathcal{M}$ calcoliamo il flusso del campo di induzione magnetica $\mathbf{B}_2$ generato dal circuito 2 attraverso la spira quadrata. Essendo $h \gg d$, possiamo considerare come campo $\mathbf{B}_2$ presente nella regione della spira quadrata quello generato dai soli due tratti rettilinei lunghi h della spira rettangolare, ed usare per questi l'espressione del campo di un filo indefinito: $\mathbf{B}_2 = 2\mathbf{B}^{(filo)}(d/2) = 2\mu_o i_2/(2\pi d/2)$. Otteniamo, nell'approssimazione $l \ll d$:

$$\Phi_1(\mathbf{B}_2) = N B_2 l^2 \cos\theta = \frac{2\mu_o N l^2 \cos\theta}{\pi d}\; i_2$$

e quindi

$$\mathcal{M} = \frac{\Phi_1(\mathbf{B}_2)}{i_2} = \frac{2\mu_o N l^2 \cos\theta}{\pi d}$$

---

b) Il momento si ottiene derivando l'energia magnetica $U = L_1 i_1^2/2 + L_2 i_2^2/2 + \mathcal{M} i_1 i_2$ rispetto a θ:

$$M = +\frac{dU}{d\theta} = i_1 i_2 \frac{d\mathcal{M}}{d\theta} = -\frac{2\mu_o N l^2 i_1 i_2}{\pi d} \sin\theta$$

Per $\theta = \pi/4$ si ottiene

$$M(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}\mu_o N l^2 i_1 i_2}{\pi d} \simeq -3.4 \cdot 10^{-7} \text{ J/rad}$$

---

c) In tal caso bisogna considerare la dipendenza del campo $\mathbf{B}_2$ dalla distanza dal tratto di filo che lo genera. Il flusso risulta:

$$\Phi_1(\mathbf{B}_2) = 2\Phi_1(\mathbf{B}^{(filo)}) = \frac{\mu_o N i_2 l}{\pi} \int_{\frac{d-l}{2}}^{\frac{d+l}{2}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o N l}{\pi}\; i_2 \ln\frac{d+l}{d-l}$$

e quindi

$$\mathcal{M}' = \frac{\mu_o N l}{\pi} \ln\frac{d+l}{d-l}$$

[osserviamo che per $l \ll d$ - usando l'approssimazione $\ln(1+x) \simeq x$ valida per $x \ll 1$ - si riottiene l'espressione trovata la punto a) per $\theta = 0$].
L'errore relativo Δ che si commette è pertanto:

$$\Delta = \frac{\mathcal{M}' - \mathcal{M}}{\mathcal{M}'} = 1 - \frac{2l/d}{\ln\frac{d+l}{d-l}} \simeq 1.3 \cdot 10^{-4}$$

Soluzione Esercizio 2

a) Denotiamo con $\hat{\mathbf{x}}$ il versore dalla piastra positiva a quella negativa del condensatore. Il campo elettrico è

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_o}\hat{\mathbf{x}} = \frac{Q}{\Sigma\epsilon_o}\hat{\mathbf{x}} = \frac{It}{\Sigma\epsilon_o}\hat{\mathbf{x}}$$

dove si è posto $Q = It$, il processo di carica del condensatore avvenendo a tasso I costante. Il valore finale si ottiene per $t = 10$ s

$$E \simeq 5.6 \cdot 10^2 \text{ V/m}$$

La densità di corrente di spostamento è

$$\mathbf{J}_s = \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{I}{\Sigma}\hat{\mathbf{x}}$$

e la corrente

$$I_s = J_s \Sigma = I = 10^{-12}\text{A}$$

diretta pertanto come $\mathbf{E}$ nello stesso verso.

---

b) Usando il teorema della circuitazione di Ampère-Maxwell per $\mathbf{B}$ lungo circonferenze centrate sull'asse si ha

$$B = \frac{\mu_o J_s \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_o I}{2\Sigma} r$$

tangente alla circonferenza considerata (verso antiorario visto da $\hat{\mathbf{x}}$).
Il vettore di Poynting in un generico punto all'interno del condensatore è

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_o} = -\frac{EB}{\mu_o}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{I^2 tr}{2\epsilon_o \Sigma^2}\hat{\mathbf{r}}$$

con direzione radiale e verso entrante.

---

c) L'energia elttromagnetica nel volume considerato è

$$U = \int d\tau \left(\frac{\epsilon_o E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_o}\right) = \frac{\epsilon_o}{2}\left(\frac{It}{\Sigma\epsilon_o}\right)^2 \pi r_o^2 d + \frac{1}{2\mu_o}\left(\frac{\mu_o I}{2\Sigma}\right)^2 2\pi d \int_0^{r_0} dr\ r^3 = \frac{\pi d r_0^2 I^2}{2\Sigma^2\epsilon_o} t^2 + \frac{\pi d r_0^4 \mu_o I^2}{16\Sigma^2}$$

essendo $\mathbf{E}$ uniforme all'interno del condensatore ed avendo utilizzato le coordinate cilindriche per l'integrazione del secondo contributo.

---

d) Il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie considerata è

$$\Phi(\mathbf{S}) = -S(r_0) 2\pi r_0 d = -\frac{\pi d r_0^2 I^2}{\epsilon_0 \Sigma^2} t$$

ove il segno meno indica il verso entrante del vettore $\mathbf{S}$. Al tempo $t = 4$ s si ha

$$\Phi(\mathbf{S}) \simeq -7.1 \cdot 10^{-14} \text{ W}$$

Notiamo che si poteva ottenere lo stesso risultato dalla relazione

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \Phi(\mathbf{S})$$

usando per U l'espressione ottenuta al punto precedente.
