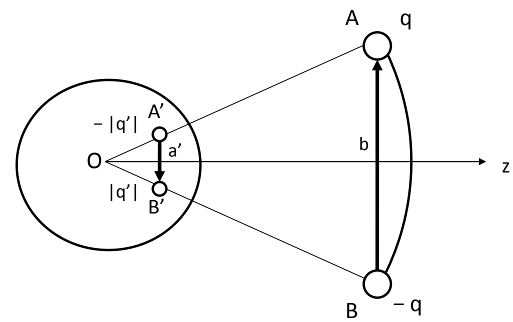
Soluzioni della prova scritta di Elettromagnetismo A.A. 2008/2009

5 Luglio 2010

(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)

Esercizio 1



a)
Facendo riferimento alla figura, dalla similitudine dei triangoli
ABO e A'B'O $\frac{d}{b} = \frac{d'}{a'}$, dove $a' = \frac{R^2}{b}$.
Per cui si ottiene: $d' = d\frac{R^2}{b^2}$.
Pertanto il dipolo $\vec{p'}$, avente direzione opposta a $\vec{p}$, ha modulo:
$p' = |q'|d' = qd\frac{R^3}{b^3} = 2.3 \cdot 10^{-11} Cm$

b)
Si ha $V(x, y, z) = 0$ sulla superficie e all'interno della sfera.
All'esterno della sfera, Il potenziale dovuto ai due dipoli risulta:
$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{px}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{3/2}} - \frac{p'x}{[x^2+y^2+(z-a')^2]^{3/2}}\} =$
$= \frac{px}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{1}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{3/2}} - \frac{R^3/b^3}{[x^2+y^2+(z-a')^2]^{3/2}}\}$

Sul il piano y,z $V(0, y, z) = 0$, ovvero quel piano è equipotenziale alla sfera, coerentemente con la simmetria del campo dipolare e con il principio di sovrapposizione dei potenziali dei due dipoli paralleli.

c)
Per le tre componenti del campo elettrico si ha:
$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} =$
$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{p}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{3/2}} - \frac{-3px^2}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{3/2}} - \frac{p'}{[x^2+y^2+(z-a')^2]^{3/2}} + \frac{3p'x^2}{[x^2+y^2+(z-a')^2]^{3/2}}\}$

$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{-3pxy}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{5/2}} - \frac{-3p'xy}{[x^2+y^2+(z-a')^2]^{5/2}}\}$

$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{-3px(z-b)}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{5/2}} - \frac{-3p'x(z-a')}{[x^2+y^2+(z-a')^2]^{5/2}}\}$

Per $x = y = 0$ si ha $E_y = E_z = 0$ mentre
$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{p}{(z-b)^3} - \frac{p'}{(z-a')^3}\}$.

come aspettato per il piano equipotenziale $x = 0$.
Per $z = R$ si ottiene:
$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{p}{(R-b)^3} - \frac{p'}{(R-a')^3}\} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{p}{(R-b)^3} + \frac{p\frac{R^3}{b^3}}{(R-\frac{R^2}{b})^3}\} = 0.$

Per $z = R$ il campo è nullo. Infatti la componente E_z è nulla poiche' l'asse z (il piano y,z) è equipotenziale, mentre le componenti tangenti alla sfera risultano anch'esse nulle perchè parallele alla superficie di un conduttore (conformemente al risultato analitico precedente).

Esercizio 2

a)
La densità superficiale di carica è $\sigma = q/\pi R^2$. La carica è in moto circolare uniforme con frequenza ν, cosicchè, se consideriamo una corona circolare di raggio r e spessore dr, questa corrisponde ad una corrente infinitesima pari a:

$$di = \frac{q\nu}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

Il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ è quindi ottenibile come sovrapposizione dei contributi delle spire circolari percorse dalla corrente infinitesima di che ricoprono tutto il disco.

Ciascuna delle spire contribuisce al campo lungo l'asse z con un termine pari a

$$dB_z = \frac{\mu_o q\nu}{R^2} \frac{r^2}{(z^2+r^2)^{3/2}} r dr$$

.

Integrando tra 0 ed R si ottiene:

$$B_z = \frac{\mu_o q\nu}{R^2} \int_0^R \left(\frac{r^2+z^2}{(z^2+r^2)^{3/2}} - \frac{z^2}{(z^2+r^2)^{3/2}}\right) r dr$$

$$B_z = \frac{\mu_o q\nu}{R^2} \left[\frac{R^2+2z^2}{(R^2+z^2)^{1/2}} - 2z\right]$$

ed otteniamo $B_z(0,0,d) = 3.20 \cdot 10^{-9}\ T$

b)
Il momento di dipolo $\vec{m}$ si ricava applicando il teorema d'equivalenza d'Ampère. Esso è diretto come l'asse z ed è ottenuto integrando tra 0 e R i contributi di tutte le spire infinitesime di corrente di:

$$m = \int_o^R \pi r^2 di = \frac{q 2\pi\nu}{R^2} \int_o^R r^3 dr = \frac{q\pi\nu}{2} R^2 = 6.28 \cdot 10^{-4} \quad Am^2$$

c)
Il momento della reazione vincolare $\vec{M}_R$ è uguale ed opposto a quello dovuto alle forze magnetiche

$$\vec{M}_R = -\vec{M} = -\vec{m} \times \vec{B}_{ext}$$

, da cui deduciamo che

$$M_x = M_z = 0$$

e

$$M_{Ry} = -M_y = -\frac{q\pi\nu}{2} R^2 B_{ext} = -7.54 \cdot 10^{-4}\ Nm$$

Esercizio 3

a)

$$H_z = NI/l$$

$$B_z = \begin{cases} \mu_0 \mu_r H_z & 0 < r < b \\ \mu_0 H_z & b < r < a \end{cases}$$

$$\Phi(B) = N[\mu_0 H_z \pi(a^2 - b^2) + \mu_0 \mu_r H_z \pi b^2] = N\mu_0 H_z \pi[a^2 + b^2(\mu_r - 1)]$$

$$L = \Phi(B)/I = \frac{\mu_0 \pi N^2}{l}[a^2 + b^2(\mu_r - 1)] = 19.8 \quad H$$

b)

$$V - L\dot{I} = RI$$

$$I = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \tau = L/R = 3,96 \quad s$$

$$2\pi b E_\phi = -\mu_0 \mu_r N \dot{I} \pi b^2 / l$$

$$E_\phi = -\frac{\mu_0 \mu_r N \dot{I} b}{2l} = -\frac{\mu_0 \mu_r N V b e^{-t^*/\tau}}{2lL} = 8.98 \cdot 10^{-3} \;\; V/m \qquad E_r = 0, \quad E_z = 0$$

c)

$$S_r = -E_\phi H_z$$

$$\Phi(S) = S_r 2\pi b l = 4.05 \quad W$$