Prova scritta d'esame di Elettromagnetismo

7 Febbraio 2012

Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

Elettromagnetismo 10 o 12 crediti: esercizi 1, 2, 4 tempo 3 h;
Elettromagnetismo 5 crediti: esercizi 3, 4 tempo 2 h;
Elettricità e Magnetismo 5 crediti: esercizi 1, 2, tempo 2 h;

ESERCIZIO 1

Su una sfera di raggio $R = 3.0$ mm, di materiale isolante è distribuita una densità superficiale di carica $\sigma(\theta, \phi) = a + b \ \cos\theta$ dove θ, ϕ sono le coordinate sferiche con origine nel centro della sfera e angolo θ riferito all'asse z, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi < 2\pi$, $a = 2.0 \cdot 10^{-8}$ Cm^{-2}, $b = 6.0 \cdot 10^{-8}$ Cm^{-2}. Un elettrone è posto nella posizione $\vec{d} = (0.3 \ m, 0, 0)$. Si calcoli:

a) la carica totale q della sfera;
b) le componenti del vettore momento di dipolo $\vec{p}$;
c) le componenti della forza agente sull'elettrone ($e = -1.6 \cdot 10^{-19} \ C$).

ESERCIZIO 2

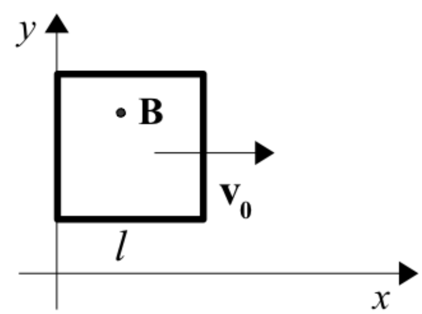
Sia data una superficie di separazione tra due mezzi di costante dielettrica relativa, rispettivamente, $\epsilon_{r1} = 2.3$ e $\epsilon_{r2} = 1.4$. Il modulo del campo in prossimità della superficie nella regione 1 è $E_1 = 10 \ \ V/cm$ e il campo forma un angolo $\theta = 30^o$ con la normale alla superficie.

a) Si calcoli il campo $\vec{E}_2$ nella regione 2, in prossimità della superficie.

Si supponga ora che sulla superficie di separazione dei due mezzi sia aggiunta una densità di carica localizzata con densità superficiale uniforme $\sigma_l = 1 \cdot 10^{-8} \ \ Cm^{-2}$.

b) Nell'ipotesi che il campo $\vec{E}_1$ non sia cambiato, si calcoli il campo nella regione 2 in questa nuova condizione.

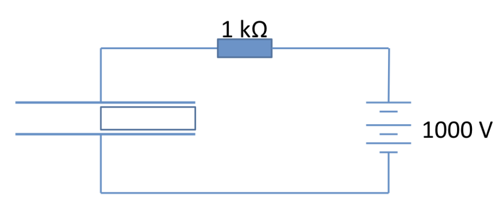
ESERCIZIO 3



Una spira quadrata di lato $l = 25 \ \ cm$, massa $m = 18 \ \ g$, resistenza $R = 10^{-2} \ \ \Omega$, viene lanciata in modo che si trovi all'istante $t = 0$ nella posizione in figura con una velocità $v_0 = 5 \ \ m/s$, in una zona dove è presente un campo d'induzione magnetica $\vec{B}$ diretto lungo z , il cui modulo aumenta linearmente con x : $B = a \ x$, con $a = 0.3 \ \ T/m$. Si chiede di calcolare:

a) l'equazione del moto della spira all'interno della regione $x > 0$;
b) la carica spostata nell'intervallo di tempo $t = (0, \infty)$;
c) la forza che occorrerebbe per mantenere la spira in moto a velocità costante v_0, una volta entrata nella zona del campo B.

ESERCIZIO 4



Un condensatore piano, inizialmente scarico, ha le armature circolari di raggio $r = 5 \ cm$ poste alla distanza $d = 1.2 \ cm$. Esso viene collegato attraverso una resistenza $R = 1 \ k\Omega$ ad un generatore di tensione $F = 1000 \ V$.

a) Calcolare il campo magnetico al suo interno in funzione della distanza dall'asse del condensatore e del tempo.
b) Una spira rettangolare di lati $a = 1 \ cm$ e $b = 5 \ cm$ é posizionata al suo interno come in figura ed ha resistenza $\rho = 10 \ \Omega$. Calcolare la massima forza elettromotrice indotta nella spira mentre il condensatore si carica.
c) Calcolare l'energia dissipata nella spira, durante l'intero processo di carica del condensatore.

Soluzioni della prova scritta

Esercizio 1

a)

Integriamo la densità di carica superficiale σ su tutta la sfera:

$$q = R^2 \int_S \sigma dS = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (a + bcos\theta) sin\theta d\theta d\phi = 4\pi R^2 a = 2.3 \cdot 10^{-12} \quad C$$

b)

Applichiamo la definizione di momento di dipolo per una distribuzione continua di carica:

$$\vec{p} = R^2 \int_S \vec{R} \sigma dS$$

essendo $\vec{R} = (R, Rcos\phi sin\theta, Rsin\theta sin\phi)$ Calcolando le tre componenti si trova

$$p_x = p_y = 0 \quad , \qquad p_z = \frac{4\pi}{3} R^3 b = 6.8 \cdot 10^{-15} \ Cm$$

c) La forza che agisce sull'elettrone è

$$\vec{F} = -e\vec{E}_{tot}$$

dove $\vec{E}_{tot}$ è esprimibile tramite lo sviluppo in multipoli del campo come la somma del campo della carica della puntiforme q posta al centro della sfera $\vec{E}_q$ e del campo del dipolo $\vec{E}_p$ ambedue calcolati in d. Poichè si ha

$$E_{q_x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{d^2} \ ; \qquad E_{q_y} = E_{q_z} = 0$$

$$E_{p_x} = E_{p_y} = 0; \quad E_{q_z} = -\frac{p_z}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{d^3}$$

ne segue che

$$F_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{eq}{d^2} = 0,62 \quad N \ ; \quad F_y = 0; \quad F_z = -\frac{e \ p_z}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{d^3} = 6.2 \cdot 10^{-3} \quad N$$

Esercizio 2

a)

Supponendo che il mezzo sia lineare, omogeneo e isotropo, abbiamo che

$$\vec{D}_1 = \epsilon_o \epsilon_{r1} \vec{E}_1 \qquad , \qquad \vec{D}_2 = \epsilon_o \epsilon_{r2} \vec{E}_2$$

In assenza di cariche libere sulla superficie, si conserva la componente normale di $\vec{D}$, quindi

$$\epsilon_{r1} E_{1n} = \epsilon_{r2} E_{2n}$$

e la componente tangente all superficie di $\vec{E}$

$$E_{1t} = E_{2t} *$$

dove gli indici n e t indicano le componenti tangenti e normali alla superficie di separazione dei campi $\vec{E}$ e $\vec{D}$. In partcolare si ha:

$$E_{1t} = E_1 sin\theta = 500\ Vm^{-1} \qquad E_{1n} = E_1 cos\theta = 866\ Vm^{-1}$$

segue che

$$E_{2t} = 500\ Vm^{-1} \qquad E_{2n} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} E_{1n} = 1.47\ kVm^{-1}$$

ovvero

$$E_2 = 1548\ Vm^{-1} \qquad \alpha = arctang \frac{E_{2n}}{E_{2t}} = 1.24 \ \ rad$$

b)

In presenza di cariche libere sulla superficie la relazione di conservazione della componente normale alla superficie del vettore $\vec{D}$ non è più verificata. Applicando il teorema di Gauss ad una porzione unitaria di superficie si avrà quindi:

$$\epsilon_{r2} {E_{2n}}^* - \epsilon_{r1} E_{1n} = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0}$$

e per la conservatività del campo elettrico

$$E_{1t} = {E_{2t}}^* = 500\ Vm^{-1}$$

Sulla base della prima equazione deduciamo:

$${E_{2n}}^* = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} E_{1n} = 1.63 \ \ kVm^{-1}$$

Da queste relazioni si ricava poi ${E_2}^* = 1.84\ kVm^{-1}$ e $\alpha^* = 1.27 \ \ rad$.

Esercizio 3

a)

La forza di Lorentz per unità di caricaè diretta nel verso negativo dell'asse y in figura ed è equilibrata dal campo elettrico solo nei lati della spira paralleli all'asse y stesso. Quando la spira si trova tra x e $x+l$, poiché il campo aumenta di intensità con x , la corrente scorre in senso orario in modo da opporsi all'aumento del flusso del campo attraverso la spira. La forza elettromotrice totale è:

$$B(x+l) - Bx = al^2 v$$

dove v è la velocità della spira all'istante in cui si trova tra x e $l+x$. ne segue che la corrente nella spira è

$$I = \frac{a\ l^2 v}{R}$$

La risultante della forza di Lorentz agente complessivamente sulla spira è diretta lungo x nel verso che si oppone al moto della spira:

$$F = I[B(x+l) - b(x)]l = I\ a\ l^2 = \frac{a^2}{R} v\ l^4$$

Applicando l'equazione della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$ s ha:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{a^2 l^4}{mR} v = -\frac{v}{\tau}$$

che ammette come soluzione

$$v(t) = v_0 exp(-\frac{t}{\tau})$$

con

$$\tau = \frac{mR}{a^2 l^4} = 0.5 \quad s$$

b) La carica spostata è

$$\int_0^\infty I dt = \int_0^\infty \frac{a\ l^2 v_0}{R} exp(-\frac{-t}{\tau}) dt = \frac{m v_0}{a^2 l^2} = 4.8 \quad C$$

c)

Se esiste una forza meccanica aggiuntiva che mantiene la spira in moto, l'equazione del moto cambia:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_{ext}}{m} - \frac{a^2 l^4}{mR} v$$

Per ottenere un $v(t) = costante = v_0$ ovvero $\frac{dv}{dt} = 0$ dall'equazione scritta sopra si deduce:

$$F_{ext} = \frac{a^2 l^4}{R} v_0 = 0,17 \quad N$$

Esercizio 4

a) Il condensatore ha una capacità

$$C = \epsilon_o \frac{\pi r^2}{d} = 5.79 \quad pF$$

.

Il campo elettrico all'interno del condensatore nella fase di carica del circuito RC ‘e dato da

$$E(t) = \frac{V_c(t)}{d} = \frac{F}{d}\left(1 - exp(-\frac{t}{\tau})\right)$$

dove $\tau = R\ C = 5.79 \quad ns$. La corrente di spostamento è

$$J = \epsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_o \frac{F}{d\tau} exp(-\frac{t}{\tau})$$

Consideriamo un circonferenza di raggio x all'interno del condensatore centrata sul suo asse e applichiamo il teorema della circuitazione. Poiché il problema ha una tipica simmetria cilindrica, otteniamo:

$$B 2\pi x = \mu_o \pi x^2 \epsilon_o \frac{F}{d\tau} exp(-\frac{t}{\tau})$$

da cui ricaviamo

$$B = x \mu_o \epsilon_o \frac{F}{2d\tau} exp(-\frac{t}{\tau})$$

b)

Essendo B perpendicolare al piano della spira rettangolare, la forza elettromotrice indotta f_i è immediatamente calcolabile come

$$f_i = -\frac{d}{dt}\left[a \int_0^b x \mu_o \epsilon_o \frac{F}{2d\tau} exp(-\frac{t}{\tau}) dx\right] = -\mu_o \epsilon_o \frac{b^2 a\ F}{4 d \tau^2} exp(-\frac{t}{\tau})$$

Ne segue che il valore della forza elettromotrice massima ${f_i}^{(max)}$ é:

$${f_i}^{(max)} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{b}{\tau}\right)^2 \frac{a}{4d} F = 173 \quad \mu V$$

avendo indicato con $c = 2.998 \cdot 10^8 \quad ms^{-1}$ la velocità della luce nel vuoto.

c)

L'energia dissipata $\mathcal{E}_\lceil$ si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\mathcal{E}_\lceil = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty {f_i}^2(t) dt = {f_i}^{(max)^2} \frac{\tau}{2\rho} = 8.66 \cdot 10^{-18} \quad J$$