Prima prova d'esonero del corso di Elettromagnetismo - a.a. 2011/12 - 18/5/2012

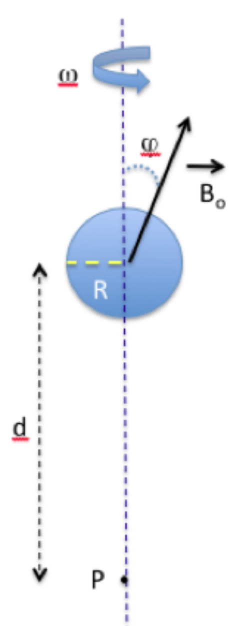
proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

ESERCIZIO 1

Un generatore ideale di tensione V_0 inizialmente carica un condensatore cilindrico al valore $Q_0 = 2 \cdot 10^{-8}\ C$. Le armature del condensatore hanno raggio $r_1 = 3\ mm$, $r_2 = 3.5\ mm$ e lunghezza $L = 50\ cm$. Successivamente si inserisce lentamente tra le sue armature una guaina omogenea di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.5$ e spessore pari alla distanza tra le armature stesse. Si chiede di calcolare:
a) la densità di carica di polarizzazione nel volume e sulle superfici del dielettrico a contatto con il metallo, ad inserimento ultimato;
b) il lavoro totale speso dal generatore per mantenere costante la differenza di potenziale tra le due armature nell'intero processo di inserimento del dielettrico.
Si consideri ora il caso in cui l'inserimento avvenga con il generatore di tensione non connesso al condensatore e si derivi:
c) l'espressione dell'energia elettrostatica totale del condensatore in funzione della lunghezza x della porzione di guaina inserita;
d) l'espressione della forza agente sul dielettrico ed il suo valore massimo.

ESERCIZIO 2

Un disco di materiale isolante, uniformemente carico con densità di carica superficiale $\sigma = 7 \cdot 10^{-7}\ C/m^2$, é vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso coincidente con un suo diametro con velocità angolare costante di modulo $\omega = 400\ rad/s$. Il disco di raggio $R = 5.0\ mm$ e spessore trascurabile, è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme di modulo $B_0 = 5.0 \cdot 10^{-4}\ T$. Il campo $\vec{B_0}$ forma un angolo $\varphi = 30^o$ con l'asse di rotazione del disco. Si chiede di calcolare:
a) il modulo, la direzione ed il verso del momento magnetico del disco in rotazione,
b) il modulo del momento della coppia che si deve applicare per mantenere invariata la direzione dell'asse di rotazione del disco.
c) Infine, si calcolino nel punto P a grande distanza dal centro del disco ($R << d = 10\ cm$ vedi figura), l'intensità, la direzione e il verso del campo d'induzione magnetica generato dal disco in rotazione.



Soluzioni della prova scritta

Esercizio 1

a)

La tensione del generatore é:

$$V_o = \frac{Q_o}{C_o} = \frac{Q_o ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\epsilon_o L} = 111\ V$$

Ne segue che a guaina inserita si ha

$$Q = C\ V_o = \epsilon_r C_o V_o$$

Per il teorema di Gauss il vettore induzione ha modulo

$$D(r) = \frac{Q}{2\pi r L}$$

Ne segue che il vettore di polarizzazione è

$$\vec{P} = \epsilon_o(\epsilon_r - 1)\vec{E} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\vec{D}$$

La densità di volume della carica di polarizzazione è:

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0$$

essendo $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho = 0$, dove ρ è la densità delle cariche localizzate.

Quindi essendo $\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n}$ si ha

$$\sigma_{P1} = \pm\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{Q}{2\pi r_1 L} = \pm 7.43\cdot 10^{-6}\ C/m^2$$
$$\sigma_{P1} = \mp\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{Q}{2\pi r_2 L} = \mp 6.35\cdot 10^{-6}\ C/m^2$$

b)

Il lavoro del generatore è:

$$L = \int_{Q_0}^{Q} V_0 dQ' = V_o(Q - Q_0) = {V_0}^2(C - C_0) = (\epsilon_r - 1)C_0{V_0}^2 = 7.76\cdot 10^{-6}\ J$$

che corrisponde a due volte la variazione di energia elettrostatica del condensatore.

c)

L'energia elettrostatica totale è:

$$U = \frac{{Q_0}^2}{2C}$$

dove la capacita totale C è:

$$C = C_x + C_{L-x} = \frac{2\pi\epsilon_o}{ln(\frac{r_2}{r_1})}\left[\epsilon_r x + (L-x)\right]$$

per cui

$$U = \frac{{Q_0}^2}{2C_0}\,\frac{1}{[1+(\epsilon_r-1)\frac{x}{L}]}$$

d)

Nel caso in cui il generatore è disconnesso, la forza è:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{(\epsilon_r-1){Q_0}^2}{2C_0L}\,\frac{1}{[1+(\epsilon_r-1)\frac{x}{L}]^2}$$

La funzione è monotòna decrescente e quindi il suo valore è massimo per $x = 0$:

$$F_{max} = \frac{(\epsilon_r-1){Q_0}^2}{2C_0L} = 7.78\cdot 10^{-6}\ N$$

Esercizio 2

a)

Ogni elemento di superficie del dischetto produce una corrente media

$$di = \frac{\omega}{2\pi} dq = \frac{\omega}{2\pi} \sigma ds$$

dove l'elemento d'area in coordinate polari aventi origine al centro del disco è $ds = rdrd\alpha$, essendo α l'angolo tra $\vec{r}$ e l'asse di rotazione. Ad ogni corrente infinitesima corrisponde un momento magnetico equivalente $d\vec{m}$

$$d\vec{m} = diS\hat{n}$$

dove S è l'area della corrispondente spira $S = \pi(rsin\alpha)^2$, il versore $\hat{n}$ ha la direzione e il verso del vettore velocità angolare $\vec{\omega}$. Il momento magnetico totale ha quindi la stessa direzione e lo stesso verso di $\hat{n}$ e il suo modulo m è

$$m = \frac{\sigma\omega}{2} \int_0^R \int_o^{2\pi} r^3 sin^2\alpha drd\alpha = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{8} = 6.87 \cdot 10^{-14} \ Am^2$$

b)

Il momento meccanico da applicare per bilanciare l'effetto del campo esterno B_0 è:

$$\vec{\mathcal{M}} = -\vec{m} \times \vec{B}_0$$

il cui modulo è

$$\mathcal{M} = m \ B_o \ sin\varphi = 1.72 \cdot 10^{-17} \ Nm$$

c)

Il campo d'induzione generato dal dischetto in rotazione a distanza $d >> R$ si può calcolare nell'approssimazione di dipolo. Lungo l'asse di rotazione esso ha la stessa direzione e verso del momento di dipolo magnetico $\vec{m}$ ed il suo modulo vale

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{1}{d^3} = 1.37 \cdot 10^{-17} \ T$$