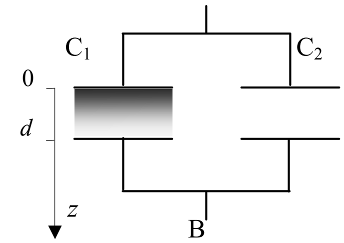
Sessione speciale d'esame di **Elettromagnetismo** – 20/5/2013

Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese



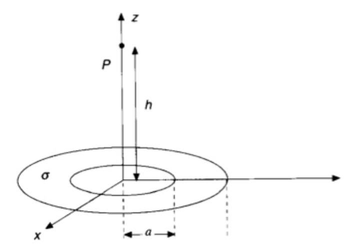

**Esercizio 1**

Due condensatori piani uguali con armature quadrate (di lato $l$=5.0 cm) e aventi distanza tra le armature $d$=2.0 mm sono collegati come mostrato in figura. La differenza di potenziale tra i punti A e B vale $V_0$=90 V. Mantenendo il sistema dei due condensatori isolato, il condensatore 1 viene riempito completamente con un materiale isolante a densità variabile lungo l'asse $z$ indicato in figura. Di conseguenza la costante dielettrica dell'isolante varia secondo la legge $\varepsilon_{r1}=1/(a+bz)$, dove $a$=0.08 e $b$=0.05 mm$^{-1}$.

a) Calcolare la capacità del condensatore 1 dopo l'inserimento del materiale isolante.
b) Calcolare la carica presente sulle armature del condensatore 1 dopo l'introduzione del materiale isolante.
c) Calcolare la densità superficiale delle cariche di polarizzazione sulle due superfici (ovvero, $z$=0 e $z$=$d$) del materiale isolante.
d) Calcolare la densità di volume delle cariche di polarizzazione all'interno del materiale isolante.

**Esercizio 2**

Un anello circolare di raggio interno $a=10\ cm$ , raggio esterno $b=20\ cm$ e spessore trascurabile giace nel piano $z = 0$ con centro nell'origine. Sull'anello è distribuita in modo uniforme una carica elettrica con densità superficiale $\sigma = A/ r^2$ dove $r$ è la distanza dall'asse ed $A= 7.21 \times 10^{-8}\ C$ . L'anello ruota con velocità angolare $\omega$=$2000\ rad/s$ diretta secondo l'asse $z$. Determinare:

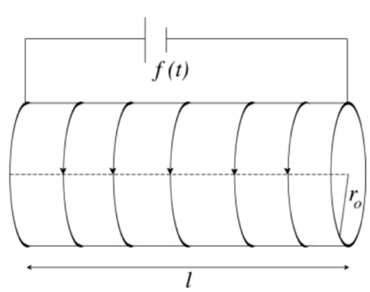



a) il modulo, la direzione e il verso del campo d'induzione magnetica in un punto sull'asse $z$ a distanza $h=30$ cm dall'origine.
b) il modulo, la direzione e il verso del momento di dipolo magnetico equivalente di tale sistema.
c) il modulo, la direzione e il verso del campo d'induzione magnetica in un punto giacente sul piano $z = 0$ a distanza $d = 10\ m$ dall'origine nell'approssimazione in cui $d$ sia assunto molto maggiore delle dimensioni dell'anello.

**Esercizio 3**

Al tempo $t = 0$ un generatore di forza elettromotrice, dipendente dal tempo con legge $f = k \cdot t$ ( essendo $k = 0.2\ V\ s^{-1}$), viene connesso ad un solenoide cilindrico di $N = 3000$ spire di resistenza trascurabile. Il solenoide ha lunghezza $l = 3\ m$ e raggio $r_o = 2\ cm$. Nell'approssimazione di solenoide indefinito, si determini:

a) l'espressione in funzione del tempo della corrente $i$ che passa nel solenoide e del campo di induzione magnetica $B$ al suo interno;
b) il campo elettrico $E$ in funzione della distanza $r$ dall'asse del solenoide, all'interno e all'esterno del solenoide stesso, specificandone direzione e verso;
c) il vettore di Poynting in funzione della distanza $r$ dall'asse (specificandone direzione e verso);
d) il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del solenoide calcolandone il valore numerico all'istante $t = 2\ s$ (trascurare gli effetti di bordo)



SOLUZIONI

**Esercizio 1**

a)
La capacità di $C_1$ può essere determinata a partire dall'espressione del campo elettrico (variabile lungo l'asse del condensatore, $\hat{z}$ )

$$\vec{E}_1' = \sigma_1' / (\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}) \hat{z} = \sigma_1' (a + bz) / \varepsilon_0 \hat{z},$$

essendo $\sigma_1' \left( = Q_1' / l^2 \right)$ la densità di carica superficiale sulle armature del condensatore.

La differenza di potenziale tra le armature di $C_1$ e'

$$V(0) - V(d) = -\int_d^0 \vec{E}_1' \cdot \mathrm{d}\vec{z} = -\int_d^0 \sigma_1' (a + bz) / \varepsilon_0 \, \mathrm{d}z = \frac{Q_1'}{\varepsilon_0 l^2} \left( ad + \frac{1}{2} bd^2 \right),$$

da cui $C_1' = Q_1' / [V(0) - V(d)] = \varepsilon_0 l^2 \Big/ \left( ad + \frac{1}{2} bd^2 \right)$=85 pF.

b)
Poiché il sistema di condensatori e' isolato la carica presente nel sistema si conserva, mentre varia la caduta di potenziale tra i punti A e B. Siano $C_1$ e $C_2$ (entrambi pari a $\varepsilon_0 l^2 / d$ =11 pF) le capacità rispettivamente dei condensatori 1 e 2 prima dell'inserimento del materiale isolante. Se $V_0$ e $V_0'$ sono le cadute di potenziale tra A e B prima e dopo l'inserimento del materiale isolante, la conservazione della carica da'

$V_0 (C_1 + C_2) = V_0' (C_1' + C_2)$ da cui $Q_1' = C_1' V_0' = C_1' V_0 (C_1 + C_2) / (C_1' + C_2)$=1.8 nC.

c) Si determina prima l'espressione del vettore di polarizzazione elettrica

$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} - 1) \vec{E}_1' = \varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} - 1) \dfrac{\sigma_1'}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} \hat{z} = \sigma_1' (1 - a - bz) \hat{z}$ da cui si ha

$\sigma_P (z = 0) = -Q_1' / l^2 (1 - a)$=-6.5·10$^{-7}$ C/m$^2$

e

$\sigma_P (z = d) = Q_1' / l^2 (1 - a - bd)$=5.8·10$^{-7}$ C/m$^2$.

d)
Essendo $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$
si trova che

$$\rho_P = -\frac{\partial}{\partial z} \left[ (1 - a - bz) Q_1' / l^2 \right] = b Q_1' / l^2 = 3.5 \cdot 10^{-5} \ \mathrm{C/m^3}.$$

**Esercizio 2**

L'anello carico posto in rotazione è equivalente ad un insieme di spire concentriche percorse da corrente e giacenti sul piano $z=0$. Sia ***dl*** l'elemento di spira giacente su tale piano e diretto come la velocita del punto del disco considerato; inoltre indichiamo con ***R*** il vettore che dall'elemento ***dl*** individua il punto P sull'asse del sistema.
Lungo un qualunque punto dell'asse del sistema ciascuna spira contribuisce al campo d'induzione magnetica totale generando un vettore d'induzione infinitesimo diretto lungo l'asse data la simmetria di rotazione. Infatti, due elementi di spira simmetrici rispetto al centro, generano due campi di induzione magnetica aventi le componenti ortogonali all'asse z uguali ed opposte. La componente $z$ del campo generato da un elemento di spira di lunghezza $l$ è

$$dB_z = |d\mathbf{B}|\ sin\ \theta = |d\mathbf{B}|\ ( r /\backslash\mathbf{R}\backslash) = \mu_o\ di\ dl\ (r / \backslash\mathbf{R}\backslash^3 )$$

Integrando su tutta la lunghezza della spira si ottiene il campo generato dalla spira:

$$dB_z = \int_o^{2\pi} (\mu_o /4\ \pi)\ di\ dl\ (r / \backslash\mathbf{R}\backslash^3 ) = (\mu_o /2 )\ di\ (r^2 / \backslash\mathbf{R}\backslash^3 )$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $r$, $R$ e $di$ sono costanti in ogni punto della spira generica. Il campo risultante in P si ottiene sommando i contributi infinitesimi generati dalle spire concentriche di raggio $r$ con $a < r <$ b in ciascuna delle quali corre la corrente

$$di = (2\pi/ T)\ r\ dr\ \sigma = \omega\ dr\ A/r .$$

essendo $\sigma = (A/r^2)$ ed il periodo di rotazione dell'anello $T = (2\pi / \omega)$:

$$B_z(h) = \int_{a^2+h^2}^{b^2+h^2} (\mu_o A\ \omega / 4 )\ (dx / x^{3/2} ) =$$
$$= (\mu_o A\omega/2 )[ (a^2+h^2)^{-1/2} - (b^2+h^2)^{-1/2}]= 3.5 \times 10^{-11} \quad [T]$$

Per effettuare l'integrale abbiamo utilizzato la variabile di integrazione $x = |R|^2 = r^2 + h^2$ con $dx= 2\ r\ dr$.

2) Il dipolo magnetico del disco è calcolabile applicando il teorema d'equivalenza d'Ampère. Ciascuna spira elementare ha un momento magnetico associato diretto lungo l'asse z il cui modulo è pari a $dm= \pi\, r^2\ di$
Essendo $di = \omega\ dr\ A/r$, il modulo del momento magnetico totale è

$$m = \int_a^b A\ \pi\, r\ \omega\ dr = (1/2)\ \ \pi\ \omega\ A\ (b^2 -a^2) = 6.8 \times 10^{-6} \quad [A\ m^2]$$

3) Essendo d>> b, si tratta di calcolare il campo a grande distanza dall'anello. In questa approssimazione esso è equivalente a quello generato da un dipolo magnetico posto al centro dei disco e diretto lungo l'asse *z* nel verso positivo. Il campo dipolare in un punto sul piano z=0 a distanza d dall'origine è quindi diretto come l'asse z ed ha modulo pari a

$$B(d) = -(\mu_o\, m\ /4\,\pi\, d^3\,) = -\ [1/(8\, d^3)]\ \mu_o A\omega\ \ (b^2 - a^2) = -6.8 \times 10^{-16}\ \ [T]$$

## Esercizio 3

*a*) L'equazione del circuito, considerando la resistenza trascurabile, è $f - L di/dt = 0$, dove $L = \mu_o N^2 \pi r_o^2 / l$ è l'induttanza del solenoide indefinito. Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$i(t) = \frac{k}{2L}\ t^2 = \frac{kl}{2\mu_o N^2 \pi r_o^2}\ t^2\ .$$

Il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$, diretto lungo l'asse, è

$$B(t) = \frac{\mu_o N i(t)}{l} = \frac{k}{2N\pi r_o^2}\ t^2\ .$$

*b*) Dall'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -d\mathbf{B}/dt$ in forma integrale $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\Phi(\mathbf{B})/dt$, si ottiene (considerando circonferenze di raggio $r < r_o$)

$$E(r,t) = -\frac{1}{2\pi r}\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\frac{ktr}{2\pi N r_o^2} \qquad \text{per } r < r_o\ ,$$

avendo tenuto conto della simmetria del problema, per cui $\mathbf{E}$ è tangente alle circonferenze centrate sull'asse. Il verso di $\mathbf{E}$ risulta contrario a quello di percorrenza della corrente $i$, ossia orario se visto dall'asse di $\mathbf{B}$ positivo. Considerando circonferenze di raggio $r > r_o$ si ha invece (il flusso di $\mathbf{B}$ è non nullo solo all'interno del solenoide)

$$E(r,t) = -\frac{1}{2\pi r}\pi r_o^2 \frac{dB}{dt} = -\frac{kt}{2\pi N r} \qquad \text{per } r > r_o\ .$$

*c*) Il vettore di Poynting, definito da $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_o$, è non nullo all'interno del solenoide ed il suo modulo è

$$|\mathbf{S}(r,t)| = \frac{|E||B|}{\mu_o} = \frac{k^2 t^3 r}{\mu_o r_o^4 (2\pi N)^2}\ ,$$

normale all'asse del solenoide e con verso entrante.

*d*) Il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del solenoide è

$$\Phi_{\mathbf{S}}(t) = -|\mathbf{S}(r_o,t)|\ 2\pi r_o l = \frac{k^2 t^3 l}{2\pi \mu_o r_o^2 N^2}\ ,$$

e per $t = 2$ s si ottiene

$$\Phi_{\mathbf{S}}(t = 2\text{s}) \simeq\ -33.8\ \text{W}\ .$$

Si noti il segno negativo, indicante un flusso entrante: il generatore, facendo aumentare la corrente nel solenoide e quindi il campo in esso presente, sta trasferendo energia all'interno del solenoide.