Esame scritto di Elettromagnetismo del 18 Settembre 2014 - a.a. 2013-2014

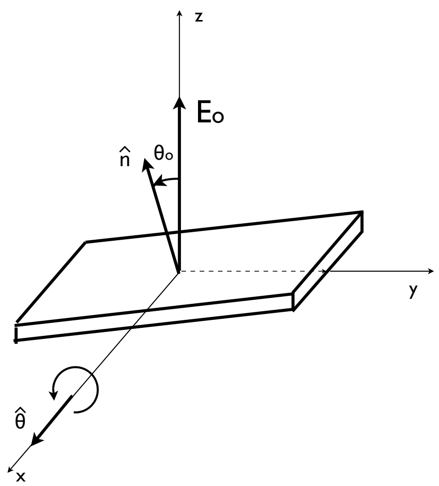
proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

Elettromagnetismo 10 o 12 crediti: esercizi 1,2,3 tempo 3 h e 30 min;

Esercizio 1

Una lastra dielettrica quadrata di lato L, di spessore $h << L$, e costante dielettrica relativa ϵ_r, ha un lato parallelo all'asse x e la normale $\hat{n}$ alla sua superficie forma un angolo θ_0 con il campo elettrico uniforme $\vec{E}_0$, diretto lungo l'asse z, in cui è immersa. Si calcoli:
a) il modulo del campo elettrico all'interno della lastra e l'angolo θ_d che esso forma con la normale $\vec{n}$ alla superficie,
b) le densità di carica di polarizzazione di volume e superficie.
Trascurando gli effetti di bordo e supponendo quindi che l'energia elettrostatica nel dielettrico sia distribuita uniformemente, si calcoli altresì:
c) il momento meccanico, in modulo direzione e verso, dovuto al campo elettrico, a cui è sottoposta la lastra.

Si assuma $L = 25\ cm$, $h = 2.0\ mm$, $\epsilon_r = 4$,
$|\vec{E}_0| = 5.3 \cdot 10^5\ V/m$, $\theta_0 = \pi/3\ rad.$



Esercizio 2

Al centro di una spira circolare di raggio a e resistenza R_s, è posta una piccola spira di raggio $r_0 << a$, complanare alla prima. La piccola spira è percorsa da una corrente costante ed è assimilabile ad un dipolo magnetico di modulo m.
Si calcoli:
a) il flusso del campo di induzione magnetica concatenato con la spira grande.
Sfruttando poi l'elasticità del materiale della spira piccola, quest'ultima viene messa in vibrazione, in modo che il suo raggio cambi secondo la legge $r(t) = r_0 + \delta \sin(2\pi\nu t)$, con $\delta << r_0$.
Si calcoli
b) l'andamento nel tempo della corrente $I_G(t)$ che scorre nella spira grande ed il suo valore a $t = 0\ s$,
c) il valore dell'energia di mutua induzione del sistema al tempo $t = 0\ s$.

Si assuma $a = 10\ cm$, $R_s = 2.0\ \Omega$, $r_0 = 4\ mm$, $m = 0.4\ Am^2$, $\delta = 0.15\ \mu m$, $\nu = 42\ kHz$

Esercizio 3

La strumentazione di bordo di un satellite artificiale assorbe 100 W di potenza elettrica ed è completamente fornita da pannelli solari investiti dalla luce solare. Quando il satellite dista dal Sole $d = 2.2 \cdot 10^{11}\ m$, si determini:
a) il modulo del campo elettrico e magnetico dovuto alla radiazione solare in prossimità dei pannelli,
b) la superficie minima dei pannelli quando questi sono ortogonali alla direzione satellite-Sole ed hanno una efficienza del 15 %,
c) la forza che la radiazione solare esercita sui pannelli, supposti totalmente assorbenti e con una superficie pari al doppio di quella minima.
Sapendo che la massa del satellite è di 100 kg,
d) si confronti la forza dovuta alla radiazione con quella gravitazionale esercitata dal Sole sul satellite.

Si assuma che l'intensità media della radiazione solare sulla Terra sia pari a $1.4\ kW/m^2$, *la distanza Terra-Sole* $d_{TS} = 1.5 \cdot 10^{11}\ m$ *e la massa del Sole* $M_S = 1.9 \cdot 10^{30}\ kg$. *Si ricorda inoltre che* $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$.

Soluzioni

Esercizio 1

a)
Indichiamo con i suffissi || e $\perp$ rispettivamente le componenti tangenziali e ortogonali alla superficie della lastra dei vettori induzione e campo elettrici, e con i suffissi 0 e d i vettori nel vuoto e nel dielettrico.

Dalla continuità della componente tangenziale del campo elettrico:
$E_{o||} = E_o \ \sin\theta_o = E_{d||}$ (conservatività)
e della componente ortogonale dell'induzione elettrostatica:
$D_{o\perp} = D_{d\perp}$ (teorema di Gauss),
si ha:

$$\tan\theta_d/\tan\theta_o = \epsilon_r \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_d = \tan^{-1}(\epsilon_r \tan\theta_o) = 1.43\ rad \simeq 82^o$$

$$E_d = |\vec{E}_d| = E_o\sqrt{\cos^2\theta_o/{\epsilon_r}^2 + \sin^2\theta_o} = 4.6\cdot 10^5\ V/m$$

Si noti che, essendo $\epsilon_r > 1$, si ha $\theta_d > \theta_0$.

b)
Essendo il campo elettrico uniforme nel dielettrico, la densità di carica di polarizzazione di volume è nulla. La densità superficiale di carica di polarizzazione è pari a:

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$$

dove $\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\vec{E}_d$ è il vettore di intensità di polarizzazione e $\hat{n}$ il versore normale alla superficie del dielettrico orientato verso l'esterno del materiale. Ne segue:

$$\sigma_p = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E_d\cos\theta_d = 1.76\ \mu C/m^2 \quad .$$

In alternativa, considerando che la componete normale dello spostamento elettrico non cambia al passaggio nel dielettrico, si ottiene:

$$\sigma_p = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\epsilon_0 E_0\cos\theta_0 = 1.76\ \mu C/m^2 \quad .$$

c)
La densità di energia elettrostatica all'interno della lastra dipende dall'angolo θ che il campo forma con la normale alla superficie all'esterno della lastra. L'espressione di u_E è:

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0{E_d}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0{E_0}^2(\frac{1}{{\epsilon_r}^2}\cos^2\theta + \sin^2\theta) \quad . \tag{1}$$

Assumendo che l'energia U_E sia uniformemente distribuita, l'energia elettrostatica nella lastra è $U_E = L^2h\ u_E$, dove L^2h è il volume della lastra. Il momento delle forze è:

$$\vec{\mathcal{M}} = -\left(\frac{\partial U_E}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_0}\hat{\theta} \tag{2}$$

dove $\hat{\theta} = \hat{\imath}$ è il versore dell'asse x.
Da ciò si deduce:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}L^2h\epsilon_r\epsilon_0E_0^2\ \sin\ 2\theta_0(\frac{1}{{\epsilon_r}^2} - 1) = -5.04\cdot 10^{-4}\ Nm$$

Il momento delle forze ha segno opposto a θ e quindi tende a riportare la lastra nella posizione di energia minima ($\theta = 0$). Si noti infatti che la funzione $u_E(\theta)$ (e così $U_E(\theta)$), per $\theta < \pi/2$ è una funzione crescente di θ.

Esercizio 2

a)
Per calcolare il flusso concatenato con la spira grande è sufficiente dedurre il coefficiente di mutua induzione M, tra le due spire. Poiché le dimensioni della spira piccola sono molto ridotte rispetto alla grande, possiamo assumere che il campo di induzione $\vec{B}_G$ della spira grande, concatenato con la spira piccola, sia uniforme su tutta la superficie della spira piccola e pari al valore del campo $\vec{B}_G$ generato dalla spira grande nel suo centro. In questa approssimazione, il flusso concatenato con la spira piccola è:

$$\Phi_p(\vec{B}_G) = \pi {r_0}^2 \frac{\mu_o}{2} \frac{I_G}{a}$$

dove I_G è la corrente che scorre nella spira grande. Ne segue che il coefficiente di mutua induzione è:

$$M = \frac{\Phi_p(\vec{B})}{I_G} = \frac{\mu_o}{2} \frac{\pi {r_0}^2}{a} = 3.16 \cdot 10^{-10} \ H$$

Il flusso concatenato con la spira grande, dovuto al campo generato dalla spira piccola è allora:

$$\Phi_G(\vec{B}) = M I_p = M \frac{m}{\pi {r_0}^2} = \mu_o \frac{m}{2a} = 2.5 \cdot 10^{-6} \ Wb$$

La corrente che scorre nella spira piccola, è dedotta applicando il teorema d'equivalenza d'Ampère:

$$I_p = m/(\pi {r_0}^2) = 8.0 \ kA \quad .$$

b)
Dilatando la spira il coefficiente di mutua induzione cambia nel tempo, e nella spira grande si ha una forza elettromotrice indotta f_i:

$$f_i = -\frac{d\Phi_G(t)}{dt} = -I_p \frac{dM(t)}{dt} = -\frac{\mu_o}{2a} \frac{dm(t)}{dt} = -2\pi^2 \nu I_p \frac{\mu_o}{a} \left[r_0 + \delta \sin(2\pi\nu t)\right] \delta \cos(2\pi\nu t)$$

Dalla formula precedente si deduce che f_i è ottenuta come somma di due termini, uno dipendente da $r_0 \delta \cos(2\pi\nu t)$ e l'altro **trascurabile** rispetto al primo perchè di ordine superiore in δ, oscillante al doppio della frequenza: $\frac{\delta^2}{2} \sin(4\pi\nu t)$.

Quindi la corrente nella bobina grande è ben approssimata dall'espressione:

$$I_G = \frac{1}{R_s} f_i = -2 \frac{I_p}{R_s} \frac{\pi^2 \mu_o \nu}{a} r_0 \delta \cos(2\pi\nu t)$$

e a $t = 0$ è:

$$I_G(0) = -2 \frac{I_p}{R_s} \frac{\pi^2 \mu_o \nu}{a} r_0 \delta = 25 \ \mu A$$

c)
L'energia di mutua induzione al tempo $t = 0$ è allora:

$$U_M = M \ I_p \ I_G(t = 0) = 6.2 \cdot 10^{-11} \ J$$

Esercizio 3

a)

L'intensità media della radiazione solare incidente sui pannelli solari I, quando il satellite è a distanza d dal Sole, può essere dedotta conoscendo il valore di quella sulla Terra I_T e la distanza Terra-Sole d_{TS}:

$$I = I_T \frac{d_{TS}^2}{d^2} = 650 \ \frac{W}{m^2} \qquad .$$

L'inensità è la quantità d'energia che incide nell'unità di tempo sull'unità di superficie, normale alla direzione della radiazione, ovvero il modulo del vettore di Poynting dell'onda elettromagnetica. Essa è pari all'energia dell'onda contenuta in un cilindro di base unitaria e altezza pari alla velocità di propagazione c ed è legata al modulo del campo elettrico dalla relazione:

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 {E_0}^2$$

Da cui si trova che:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} = 700 \ \frac{V}{m}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 2.3 \cdot 10^{-6} \ T$$

b)

Poichè la potenza assorbita, data l'intensità e l'efficienza $\eta = 0.15$, vale $P = \eta * I * S$, per ottenere una potenza di $P = 100 \ W$, dovremo avere una superficie minima esposta pari a:

$$S_{min} = \frac{P}{\eta I} = 1.02 \ m^2$$

c)

Se i pannelli sono larghi il doppio di tale misura, $S = 2S_{min}$, la forza che si esercita su pannelli totalmente assorbenti è:

$$F = \frac{I}{c}(2 \ S_{min}) = \frac{2P}{c\eta} = 4.4 \cdot 10^{-6} \ N$$

La forza dovuta all'attrazione gravitazionale del Sole è ben più intensa. Infatti si ha:

$$F_{gr} = G \frac{m_{sat} M_S}{d^2} = 0.26 \ N$$