Corso di Elettromagnetismo

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

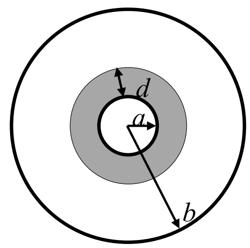
a.a. 2013/2014 - Sessione speciale 27 Ottobre 2014

Esercizio 1

Si consideri un condensatore cilindrico di lunghezza $h = 12$ cm con superficie cilindrica interna di raggio $a = 1.0$ cm e superficie cilindrica esterna di raggio $b = 4.0$ cm. La superficie cilindrica interna è ricoperta da uno strato di dielettrico omogeneo ed isotropo di spessore $d = 1.0$ cm e costante dielettrica $\epsilon_r = 3.0$. Si assuma che la differenza tra la lunghezza h ed i raggi a e b sia sufficiente a consentire la usuale schematizzazione in cui il campo elettrico nell'intecapedine fra i due conduttori sia radiale.

1) Si calcoli il valore della capacità del sistema.

2) Se la superficie cilindrica interna ha potenziale $V_o = 5.0$ kV rispetto a quella esterna e da quest'ultima superficie viene emesso un elettrone (carica $q = -1.6 \times 10^{-19}$ C), ad esempio per effetto termoionico, con velocità iniziale trascurabile, calcolare l'energia cinetica dell'elettrone quando questo raggiunge il dielettrico.

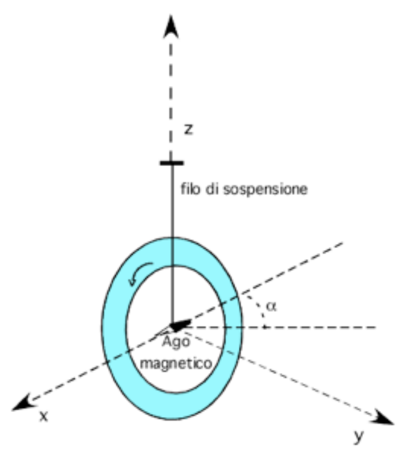


Esercizio 2

Un ago magnetico di dimensioni trascurabili, di momento $m = 2.0\ A\ m^2$, è appeso ad un filo e può ruotare sul piano orizzontale. Il filo oppone alla rotazione dell'ago un momento torcente $M = k\alpha$ dove α è l'angolo rispetto alla direzione di riposo. Un anello circolare di spessore trascurabile, di raggi esterno $R_2 = 20\ cm$ e interno $R_1 = 10\ cm$, e uniformemente carico con densità $\sigma = 0.1\ Cm^{-2}$, giace nel piano identificato dal filo e dalla direzione dell'ago magnetico nella sua posizione di riposo. Il centro dell'anello e quello dell'ago coincidono. Il disco viene poi posto in rotazione attorno al proprio asse con velocità angolare $\omega = 600\ rads^{-1}$, e l'ago ruota di $\alpha_o = 0.20\ rad$ nel piano orizzontale. Si calcolino:

a) il campo magnetico nel centro del disco,

b) il valore della costante k.



Esercizio 3

Un'onda elettromagnetica piana, polarizzata linearmente lungo l'asse z si propaga nel verso positivo dell'asse x di un sistema di coordinate $Oxyz$. L'onda è monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 1\ m$ e intensità media $I = 1\ mW/m^2$. Lungo tutto il piano di equazione $x = 0$ si trova depositato uno strato di materiale dielettrico di spessore trascurabile. Quando questo materiale è attraversato dall'onda, assorbe il 50 % dell'intensità incidente, senza che avvenga alcuna riflessione e senza alterare la fase, la lunghezza d'onda e lo stato di polarizzazione dell'onda incidente.

Si calcoli:

a) l'ampiezza, la pulsazione ed il vettore d'onda dell'onda entrante ed uscente dallo strato assorbente;

b) si esprima analiticamente l'energia elettromagnetica totale contenuta in un parallelepipedo di base quadrata di lato λ e che si estende da $x = -\lambda$ a $x = \lambda$ e se ne calcoli il valore medio su un periodo d'oscillazione;

c) si esprima analiticamente il flusso di energia uscente dal parallelepipedo e se ne calcoli il valor medio su un periodo. Si specifichi il segno di questo flusso.

Soluzioni

Esercizio 1

a)
Il sistema può essere descritto come composto da due condensatori cilindrici in serie. Il condensatore più interno ha capacità

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_o h}{ln[\frac{d+a}{a}]}$$

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon_o h}{ln[\frac{b}{d+a}]}$$

$$C_{Tot} = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_o h}{ln[\frac{d+a}{a}] + \epsilon_r ln[\frac{b}{d+a}]} = 7.2 \quad pF$$

b)
Il valore dell'energia cinetica dell'elettrone quando raggiunge il dielettrico può essere ottenuto facilmente dalla corrispondente variazione di energia potenziale. Il campo elettrostatico è diretto radialmente e, nella zona in cui la distanza r dall'asse di simmetria del sistema è tale che $(a + d) < r < b$, ha modulo

$$E(r) = \frac{C_{Tot}V_o}{2\pi\epsilon_o hr}$$

Questo si può verificare facilmente sfruttando il fatto che, nell'approssimazione suggerita, il sistema ha simmetria cilindrica. Quindi, applicando il teorema di Gauss, per il sistema qui considerato la carica totale Q all'interno di una superficie cilindrica di raggio r, con r tale che $a + d < r < b$, si ha

$$Q = C_{Tot}V_o$$

Da questo si deduce che l'energia cinetica dell'elettrone quando raggiunge il dielettrico è:

$$K_r = \frac{1}{2}mv^2 = e\Big[V(b) - V(a+d)\Big] = \frac{eC_{Tot}V_o}{2\pi\epsilon_o h} ln\left(\frac{b}{a+d}\right) = 6.0 \cdot 10^{-16} \quad J$$

Esercizio 2

a)
a) La carica su una coroncina circolare di larghezza dr è $dq = 2\pi r\sigma dr$ e quindi la corrente relativa è:

$$dI = \frac{dq}{T} = dq\frac{\omega}{2\pi} = \omega r\sigma dr$$

Riferendoci al disegno del testo, essendo il disco posto sul piano xz, il campo al centro del disco della coroncina circolare è diretto come l'asse y ed il suo modulo e il contributo infinitesimo della corrente dI é:

$$dB = \frac{\mu_o}{2r}dI = \frac{1}{2}\mu_o\omega\sigma dr$$

e integrando in r si ha:

$$B = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\mu_o\omega\sigma dr = \frac{1}{2}\mu_o\omega\sigma(R_2 - R_1) = 3.8 \cdot 10^{-6}\ T$$

b)
Il momento meccanico che il campo applica sull'ago magnetico è

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

e all'equilibrio deve essere

$$\vec{\mathcal{M}} + \vec{M} = 0$$

Quindi si ha:

$$mBsin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_o\right) = k\alpha_o$$

e di conseguenza si ottiene

$$k = \frac{mBcos\alpha_o}{\alpha_o} = 3.7 \cdot 10^{-5}\ N\ m$$

Esercizio 3

a)
Poichè l'onda si propaga nel vuoto si ha

$$k = 2\pi/\lambda = 6.28\ m^{-1} \qquad \omega = ck = 1.9 \cdot 10^9\ rad/s$$

L'intensità dell'onda piana è

$$I = c\epsilon_o \frac{{E_o}^2}{2}$$

da cui ricaviamo l'ampiezza dell'onda incidente e di quella trasmessa

$$Eo = (2\frac{I}{c\epsilon_o})^{1/2} = 0.88\ V/m \qquad E_1 = E_0(0.5)^{1/2} = 0.62\ V/m$$

b)
La densità di energia prima e dopo aver attraversato lo strato è data da

$$W_o = \epsilon_o {E_o}^2 cos^2(\omega t - kx) \qquad W_1 = \epsilon_o {E_1}^2 cos^2(\omega t - kx)$$

L'energia contenuta nel parallelepipedo è:

$$U_{tot} = \int_{\tau_o} W_o d\tau_o + \int_{\tau_1} W_1 d\tau_1 + = \lambda^2 \int_{-\lambda}^{0} W_o dx + \lambda^2 \int_{0}^{\lambda} W_1 dx$$

Calcoliamo in modo esplicito iI primo integrale:

$$\lambda^2 \int_{-\lambda}^{0} W_o dx = \lambda^2 \int_{-\lambda}^{0} \epsilon_o {E_o}^2 cos^2(\omega t - kx) dx = \frac{\lambda^2}{k} \int_{\omega t + 2\pi}^{\omega t} \epsilon_o {E_o}^2 cos^2\alpha d\alpha = \frac{1}{2}\lambda^3 \epsilon_o {E_o}^2$$

Calcolando in modo analogo il secondo termine, otteniamo un risultato indipendente dal tempo per cui anche l'energia totale sarà indipendente dal tempo e pari a

$$U_{tot} = \frac{1}{2}\lambda^3 \epsilon_o ({E_o}^2 + {E_1}^2) = 0.5 \cdot 10^{-11}\ J$$

c)
Poichè l'onda si propaga lungo l'asse x non avremo flusso attraverso la parete laterale del parallelepipedo mentre ci sarà solo lungo le basi. In $x = \lambda$ la normale alla base è diretta come il versore dell'asse x mentre in $x = -\lambda$ sarà opposta. Inoltre il vettore di Poynting è pari

$$S(\lambda) = \epsilon_o c {E_1}^2 cos^2(\omega t - k\lambda) = I cos^2\omega t \qquad S(-\lambda) = \epsilon_o c {E_o}^2 cos^2(\omega t + k\lambda) = 2I cos^2\omega t$$

e i corrispondenti flussi sono allora

$$\Phi(\lambda) = \lambda^2 I cos^2\omega t \qquad \Phi(-\lambda) = -2\lambda^2 I cos^2\omega t$$

così che il flusso totale e il suo valor medio in un periodo risultano essere:

$$\Phi_{tot} = -\lambda^2 I cos^2\omega t \qquad < \Phi_{tot} > = -\lambda^2 \frac{I}{2} = -0.5 \quad mW$$

.