

Corso di Elettromagnetismo

Prova scritta / recupero esoneri: a.a. 2014/15, 13 Luglio 2015

Proff. S. Giagu, F. Lacava, D. Trevese

- intero scritto: risolvere i problemi 1, 2 e 3: tempo a disposizione 3.5h;

- recupero del primo, secondo, terzo esonero: risolvere rispettivamente il problema 1, 2 o 3: tempo a disposizione 1.5h;

Problema 1

Su di una sfera cava, isolante, sottile, di raggio R e momento di inerzia I è uniformemente distribuita una carica Q . Nella sfera è praticato un piccolo foro di raggio $a \ll R$.

Si calcoli:

- la differenza di potenziale fra il centro del foro ed un punto della sfera diametralmente opposto;
- il momento di dipolo della distribuzione di carica rispetto al centro della sfera.
- Se la sfera è immersa in un campo elettrico esterno uniforme E_0 ed è vincolata a ruotare attorno al proprio centro, si determini l'equazione differenziale del moto;
- si individui la posizione di equilibrio stabile e si determini la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a detta posizione di equilibrio.

[Dati: $R = 1.5$ cm, $I = 3 \cdot 10^{-7}$ Kg m², $Q = 3 \mu\text{C}$, $a = 600 \mu\text{m}$.]

Problema 2

Un elettromagnete è costituito da un nucleo toroidale di sezione $S = 1$ cm² e raggio medio $R = 1$ m. L'avvolgimento di eccitazione è costituito da $N = 1000$ spire. Sperimentalmente, per il materiale ferromagnetico, si misurano un valore del campo magnetico e dell'induzione magnetica, in una situazione in cui la magnetizzazione differisce di una quantità trascurabile rispetto al suo valore di saturazione, pari a $H_m = 3 \times 10^4$ As/m e $B_m = 2$ T. Si misurano inoltre un'induzione magnetica residua pari a $B_r = 1$ T e un campo di coercizione pari a $H_c = -10^4$ As/m. Il ciclo di isteresi è tale che la curva $B(H)$ si può approssimare con tratti rettilinei nel primo e nel secondo quadrante.

- Determinare il valore del campo di induzione magnetica, del campo magnetico in un traferro di spessore $d = 2$ cm presente nel circuito magnetico lungo la sezione normale quando nelle spire circola una corrente pari a $I = 10$ A.
- Ripetere il calcolo del punto a) nel caso in cui la corrente sia $I = 20$ A.
- Nelle condizioni del punto (a), determinare induzione magnetica, campo magnetico e magnetizzazione all'interno del nucleo.

Problema 3

In una regione di spazio si trova un campo di induzione magnetica statico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r, z)$ con simmetria cilindrica intorno all'asse z , e in cui r indica la distanza dall'asse z . La componente di \mathbf{B} lungo l'asse z è nota e pari a $B_z = \frac{B_0 z}{h}$, con h e B_0 costanti positive.

- Determinare la componente radiale del campo di induzione magnetica B_r .

Una piccola spira circolare di raggio b , centrata sull'asse z e con superficie perpendicolare all'asse z stesso si muove con velocità v_0 costante lungo la direzione positiva dell'asse z . Indicando con R la resistenza elettrica della spira, e trascurandone il coefficiente di autoinduzione, calcolare:

- la corrente indotta nella spira e la potenza dissipata per effetto Joule;
- la forza applicata dall'esterno sulla spira, indicandone direzione e verso.

[Dati: $B_0 = 5.0$ T, $h = 2.0$ m, $b = 1.0$ cm, $R = 2.0 \Omega$, $v_0 = 50.0$ m/s.]

Problema 1

La distribuzione di carica descritta può essere sostituita con una carica Q uniformemente distribuita sull'intera sfera, con densità di carica superficiale $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ più una calotta sferica di raggio a e densità di carica opposta, in luogo del piccolo foro.

Risulta $\sigma = 1.06 \times 10^{-3} \text{Cm}^{-2}$

a)

Il potenziale dalla sfera è semplicemente: $V_{sfera} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$ mentre quello della piccola calotta sferica si può valutare facilmente:

$$V_{foro} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_{calotta}} \frac{-\sigma dS}{|\Delta r|}$$

Riferendoci alla figura Fig. 1, essendo $a \ll R$, possiamo scrivere $\Delta r = R\theta$ e poi $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \simeq R^2 \theta d\theta d\phi$ quindi:

$$V_{foro} = -\frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \theta_{max} = -\frac{\sigma a}{2\epsilon_0}$$

essendo $\theta_{max} = a/R$.

Evitando di approssimare all'inizio del calcolo avremmo:

$$\begin{aligned} V_{foro} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_{calotta}} \frac{-\sigma dS}{|\Delta r|} = -\frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_{max}} \frac{\sin\theta}{2R\sin\frac{\theta}{2}} d\theta = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_0^{\theta_{max}} \frac{2\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} d\theta = \\ &= -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_0^{\theta_{max}} \cos\frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \int_0^{\theta_{max}} d\sin\frac{\theta}{2} = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \sin\frac{\theta}{2} \Big|_0^{\theta_{max}} \simeq -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{\theta}{2} = -\frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

Ne segue per il potenziale al centro del foro:

$$V(\theta = 0) = V_{sfera} + V_{foro} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(R - \frac{a}{2} \right)$$

Il potenziale in un punto opposto al foro rispetto al centro, è la somma del potenziale della superficie sferica, già trovato, più quello della piccola calotta sferica negativa pensata concentrata nel vertice della calotta (essendo $a \ll R$):

$$V_{foro}(\theta = \pi) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi a^2 \sigma}{2R} = -\frac{a^2 \sigma}{8\epsilon_0 R}$$

Il potenziale in quel punto è quindi:

$$V(\theta = \pi) = V_{sfera} + V_{foro}(\theta = \pi) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(R - \frac{a^2}{8R} \right)$$

e infine:

$$\Delta V = V_{sfera} + V_{foro}(\theta = 0) - V_{sfera} + V_{foro}(\theta = \pi) = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \left(\frac{a}{4R} - 1 \right) < 0$$

Il potenziale al centro del foro si può facilmente ricavare anche sovrapponendo al potenziale della superficie sferica quello di un dischetto carico negativamente.

Il potenziale sull'asse di un disco (vedi Fig. 2) a distanza z dal suo centro è (vedi per es. Mencuccini-Silvestrini par. 1.7):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{-\sigma dS}{|\Delta r|} = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{2\pi r}{\sqrt{z^2 + r^2}} dr = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^a \frac{dr^2}{\sqrt{z^2 + r^2}} =$$

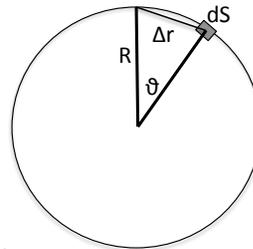


Fig. 1

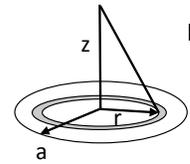


Fig. 2

$$= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{z^2 + r^2} \Big|_0^a = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right]$$

che nel limite $z \rightarrow 0$ diventa:

$$V_{f\text{oro}} = -\frac{\sigma a}{2\epsilon_0}$$

come trovato in precedenza.

b)

Il momento di dipolo della distribuzione di carica rispetto al centro della sfera è la somma dei contributi della carica positiva e negativa. Il primo è nullo per simmetria e perché il baricentro della carica coincide con il polo, mentre il secondo vale qR , dove q è la carica del dischetto.

Si ha: $q = \pi a^2 \sigma$ e quindi $p = R\pi a^2 \sigma = Ra^2 \frac{Q}{4R^2} = \frac{Qa^2}{4R} = 18 \times 10^{-12} \text{Cm} = 18 \text{ pCm}$. c)

Dalla seconda equazione cardinale $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ si ottiene:

$I\dot{\vec{\omega}} = \vec{p} \times \vec{E}_o$ dove I è il momento di inerzia della sfera rispetto a un asse passante per il centro.

Si ha quindi:

$$I \frac{d\omega}{dt} + p E_o \sin\theta = 0 \quad I\ddot{\theta} + p E_o \sin\theta = 0$$

d)

Per piccole oscillazioni si ha $\sin\theta \sim \theta$ e l'equazione differenziale diventa:

$$\ddot{\theta} + \frac{pE_o}{I} \theta = 0.$$

Per cui le piccole oscillazioni hanno pulsazione $\omega_o = \sqrt{\frac{pE_o}{I}} = \sqrt{\frac{Qa^2 E_o}{4IR}}$ e frequenza $\nu_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Qa^2 E_o}{4IR}}$

Problema 2

a)

Dalla legge di Ampère per il campo \vec{H} applicata alla circonferenza media del nucleo otteniamo

$$Hl + H_0 d = NI, \quad (1)$$

dove $H_0 = B_0/\mu_0$ è il campo magnetico nel traferro. Per le condizioni di raccordo del campo \vec{B} abbiamo che $B_0 = B$, da cui

$$B(H) = \frac{i\mu_0 N}{d} - \frac{Hl\mu_0}{d}. \quad (2)$$

Nel piano $B-H$, tale curva è una retta con pendenza negativa e intercetta $B(H=0) = \frac{i\mu_0 N}{d}$ che varia con la corrente che attraversa le spire. Il valore di B si trova tramite l'intersezione di tale retta con la curva di isteresi. Con i dati del problema, l'intercetta vale:

$$B(H=0) = \frac{i\mu_0 N}{d} \approx 0.63 \text{ T} < B_r \quad (3)$$

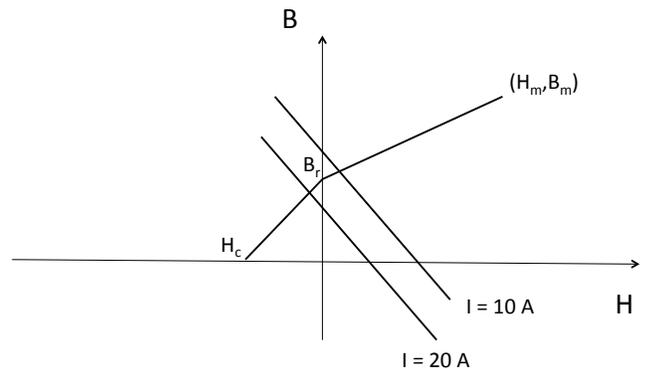
Dal momento che $B(H=0) < B_r$, la retta intersecherà la curva di isteresi nel secondo quadrante in cui

$$B = B_r + \frac{B_r}{|H_c|} H \quad (4)$$

Il sistema fra Eq. (2) e Eq. (4) fornisce il punto di intersezione:

$$H = -\frac{H_c(B_r d - i\mu_0 N)}{B_r d + H_c l \mu_0} \approx -751 \text{ As/m}, \quad (5)$$

$$B = \frac{B_r \mu_0 (H_c l + iN)}{B_r d + H_c l \mu_0} \approx 0.95 \text{ T}, \quad (6)$$



Nel traferro, $B_0 = B \approx 0.95 \text{ T}$ e $H_0 = B/\mu_0 \approx 7.36 \times 10^5 \text{ As/m}$ e la magnetizzazione è nulla.

b)

In questo caso l'intercetta vale

$$B(H = 0) = \frac{i\mu_0 N}{d} \approx 1.26 \text{ T} > B_r \quad (7)$$

Dal momento che $B(H = 0) > B_r$, la retta intersecherà la curva di isteresi nel primo quadrante in cui

$$B = B_r + \frac{B_m - B_r}{H_m} H \quad (8)$$

Il sistema fra Eq. (2) e Eq. (8) fornisce il punto di intersezione:

$$H = -\frac{H_m(B_r d - i\mu_0 N)}{B_m d - B_r d + H_m l \mu_0} \approx 599.5 \text{ As/m}, \quad (9)$$

$$B = \frac{\mu_0(B_m i N + B_r H_m l - B_r i N)}{B_m d - B_r d + H_m l \mu_0} \approx 1.02 \text{ T}, \quad (10)$$

Come prima, nel tramezzo $B_0 = B \approx 1.02 \text{ T}$ e $H_0 = B/\mu_0 \approx 8.12 \times 10^5 \text{ As/m}$ e la magnetizzazione è nulla.

c) Nelle condizioni del punto a) abbiamo $H = -751 \text{ As/m}$ e $B = 0.95 \text{ T}$, pertanto la magnetizzazione vale $M = B/\mu_0 - H \approx 7.37 \text{ A/m}$.

Problema 3

a)

La componente radiale del campo B può essere ottenuta sia sfruttando la seconda equazione di Maxwell, che utilizzandone la versione integrale. Scrivendo la seconda equazione di Maxwell in coordinate cilindriche avremo:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \implies \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{B_0}{h} \implies \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -\frac{B_0 r}{h} \quad (11)$$

$$B_r = -\frac{B_0 r}{2h}. \quad (12)$$

Alternativamente imponendo che il flusso di B attraverso una superficie chiusa cilindrica di raggio r e altezza L centrata intorno all'asse z sia nullo:

$$\Phi(\mathbf{B}) = 0 = \pi r^2 [B_z(z+L) - B_z(z)] + 2\pi r L B_r(r) \implies \frac{\pi r^2 B_0 L}{h} + 2\pi r L B_r(r) \quad (13)$$

$$B_r(r) = -\frac{B_0 r}{2h}. \quad (14)$$

b)

Il flusso di B attraverso la superficie della spiretta risulta pari a:

$$\Phi = B_z \pi b^2 = \frac{B_0 z \pi b^2}{h}; \quad (15)$$

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 \pi b^2}{h} \frac{dz}{dt} = -\frac{B_0 \pi b^2}{h} v_0; \quad (16)$$

$$I = \frac{f_i}{R} = -\frac{B_0 \pi b^2 v_0}{R h} \simeq 2 \text{ mA}. \quad (17)$$

con la corrente indotta I avente direzione oraria (Legge di Lenz).

La potenza dissipata sarà data da $W = RI^2$:

$$W = RI^2 = \frac{\left(\frac{B_0 \pi b^2 v_0}{h}\right)^2}{R} = 7.7 \cdot 10^{-5} \text{ W}. \quad (18)$$

c)

Al passaggio della corrente, sul tratto di spira $d\vec{l}$ si manifesta una forza:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

. La componente \hat{z} del campo \vec{B} determina su ogni tratto una componente della forza $d\vec{F}_r$ con verso radiale. La risultante di queste forze è chiaramente nulla. Invece la componente \hat{r} del campo determina su ogni tratto $d\vec{l}$ una forza con direzione $-\hat{z}$:

$$d\vec{F}_z = I d\vec{l} \times \vec{B}_r = -I dl B_r \hat{z} = -\frac{B_0 \pi b^2 v_0}{Rh} \frac{B_0 b}{2h} dl \hat{z}$$

che integrata sulla circonferenza diventa:

$$\vec{F} = -\frac{B_0 \pi b^2 v_0}{Rh} \frac{B_0 b}{2h} \cdot 2\pi b \hat{z} = -\left(\frac{B_0 \pi b^2}{h}\right)^2 \frac{v_0}{R} \hat{z}$$

Allo stesso risultato si può arrivare osservando che, poiché la spira si muove a velocità costante, la forza totale agente su essa è nulla. Occorre quindi una forza esterna uguale e opposta alla forza magnetica, che tende a frenare la spira. Il modo più semplice per calcolare la forza esterna F_{est} consiste nell'osservare che questa forza deve fornire esattamente la potenza dissipata nel circuito:

$$\mathbf{F}_{est} \cdot \mathbf{v}_0 = W \implies \mathbf{F}_{est} = \mathbf{v}_0 \frac{\left(\frac{B_0 \pi b^2}{h}\right)^2}{R} = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ N.} \quad (19)$$

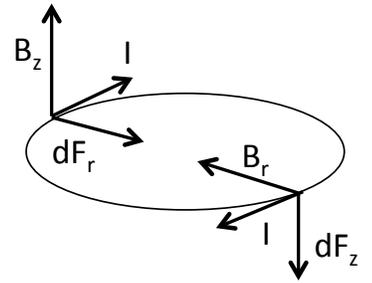


Fig. 3