

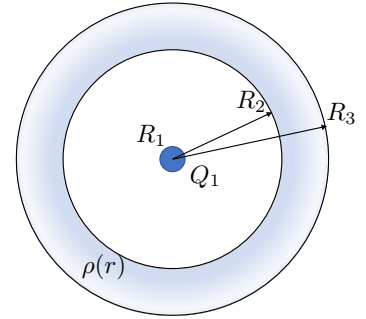
Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

**Esercizio 1**

Su un conduttore sferico di raggio  $R_1$  è depositata una carica  $Q_1$ . Concentrico al conduttore è posto un guscio sferico, di raggio interno  $R_2$  e raggio esterno  $R_3$ , sul quale è distribuita una carica localizzata la cui densità di volume  $\rho(r)$  dipende solo dalla distanza dal centro del sistema.

Si chiede di:

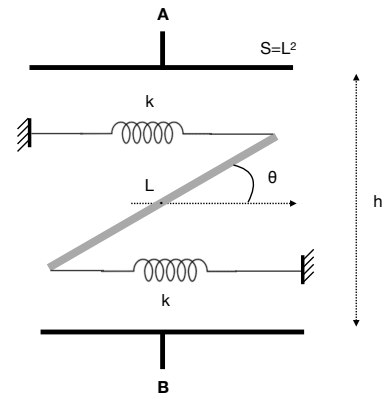
- a) determinare la funzione  $\rho(r)$  che permette di avere un campo elettrico in modulo costante su tutto il guscio;
- b) calcolare la carica totale  $Q_2$  contenuta nel guscio sferico;
- c) verificare che il campo elettrico è continuo per  $r > R_1$ , e disegnarne l'andamento in funzione di  $r$ ;
- d) ricavare l'espressione dell'energia elettrostatica  $U$  del sistema (senza calcolo numerico).



*Dati:*  $R_1 = 5.00$  mm,  $R_2 = 7.50$  cm,  $R_3 = 10.0$  cm,  $Q_1 = 2.50$  nC

**Esercizio 2**

Una lastra dielettrica quadrata di spessore  $d$  e lato  $L \gg d$  è costituita da materiale dielettrico perfetto ed isotropo di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ . La lastra è posta al centro (vedi figura) di un condensatore piano con armature quadrate di lato  $L$ , inizialmente caricato in modo che il campo elettrico nello spazio interno vuoto abbia valore  $E_0$ . I due estremi della lastra sono connessi come in figura a due molle ideali di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla. La lastra si trova in equilibrio e forma un angolo  $\theta$  rispetto alla direzione parallela alle armature del condensatore.



Trascurando gli effetti di bordo, e assumendo che il campo elettrico in prossimità delle superfici esterne del dielettrico conservi la direzione ortogonale alle superfici del condensatore, determinare, in funzione dell'angolo  $\theta$ :

- a) l'espressione del campo elettrico  $E$  all'interno della lastra e l'angolo  $\theta'$  che esso forma con la normale alla superficie della lastra stessa;
- b) le densità di carica di polarizzazione nel dielettrico;
- c) l'espressione della energia elettrostatica all'interno del dielettrico (si assuma la densità di energia elettrostatica uniforme all'interno del dielettrico).

Infine si trovi:

- d) l'espressione del momento meccanico complessivo agente sul dielettrico e l'espressione di  $\cos \theta$ .

[Si suppongano noti:  $d, k, h, L, \epsilon_r, E_0$ ]

## Soluzione 1

a)

All'interno dello strato sferico, indicando con  $E_r$  il valore costante del campo radiale, la prima equazione di Maxwell in coordinate sferiche si scrive:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) &= \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} r^2 \quad \rightarrow \quad 2r E_r = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} r^2 \\ \rho(r) &= \frac{2\epsilon_0}{r} E_r \end{aligned}$$

Allo stesso risultato si perviene naturalmente dal teorema di Gauss applicato all'interno dello strato ( $R_1 < r < R_2$ ):

$$\Phi_E(r) = \frac{Q_1 + Q_2(r)}{\epsilon_0} \quad 4\pi r^2 E_r = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_2}^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

essendo  $Q_2(r)$  la carica nello strato a distanza radiale dal centro compresa tra  $R_2$  e  $r$ .

Differenziando i due membri:

$$8\pi r E_r dr = \frac{dQ_2(r)}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^2 \rho(r) dr}{\epsilon_0} \quad \text{e quindi:} \quad \rho(r) = \frac{2\epsilon_0 E_r}{r}$$

Il valore del campo elettrico  $E_r$  è determinato dalla richiesta di campo costante su tutto lo strato, quindi anche per  $r = R_2$  dove è presente il campo generato dalla sola carica  $Q_1$ :

$$E_r = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} = 4.99 \text{ kV/m}$$

E quindi per  $\rho$  si trova:

$$\rho(r) = \frac{Q_1}{2\pi} \frac{1}{R_2^2} \frac{1}{r}$$

In alternativa il valore di  $E_r$  si può trovare applicando il teorema di Gauss su una superficie sferica di raggio  $r$  interna allo strato (con  $R_2 < r < R_3$ ):

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E_r &= \frac{Q_1 + Q_2(r)}{\epsilon_0} \\ Q_2(r) &= \int_{R_2}^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = \int_{R_2}^r \frac{2\epsilon_0}{r'} E_r 4\pi r'^2 dr' = 4\pi\epsilon_0 E_r (r^2 - R_2^2) \end{aligned}$$

che inserita nella precedente permette di ricavare per  $E_r$  il valore già scritto sopra.

b)

Da quanto trovato in precedenza, la carica totale nello strato  $Q_2 = Q_2(R_3)$  risulta:

$$Q_2 = 4\pi\epsilon_0 E_r (R_3^2 - R_2^2) = Q_1 \left( \frac{R_3^2}{R_2^2} - 1 \right) = 1.94 \text{ nC}$$

c)

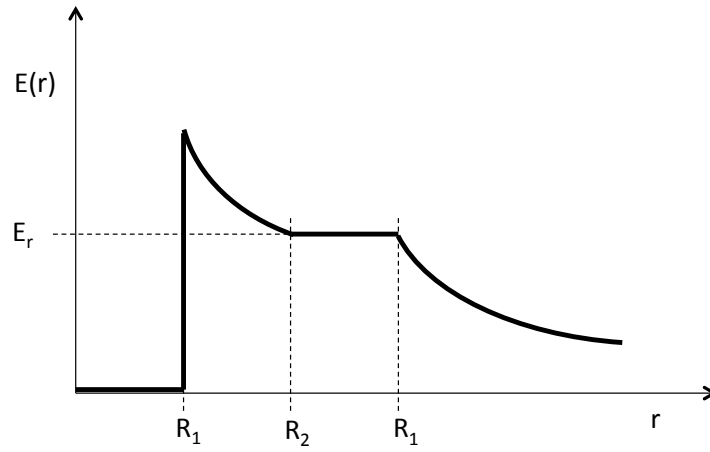
All'interno del conduttore ( $r < R_1$ ) il campo elettrico è nullo.

Dal teorema di Gauss per  $R_1 < r \leq R_2$  è immediato:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \quad E(R_2) = E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_2^2}$$

Per  $R_2 \leq r \leq R_3$  il campo è  $E_r$  e per  $r \geq R_3$ :

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2(r)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \frac{R_3^2}{R_2^2} \quad E(R_3) = E_r$$



d)

Per trovare l'energia elettrostatica si può integrare la densità di energia  $u = \epsilon_0 E^2/2$  su tutto lo spazio.

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

$$U_{23} = \int_{R_2}^{R_3} \frac{\epsilon_0 E_r^2}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{3} \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{R_3^3 - R_2^3}{R_2^4} \right]$$

$$U_{3\infty} = \int_{R_3}^{\infty} \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \frac{R_3^2}{R_2^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \frac{R_3^4}{R_2^4}$$

$$U_{Tot} = U_{12} + U_{23} + U_{3\infty} = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{4}{3} \frac{1}{R_2} + \frac{4}{3} \frac{R_3^3}{R_2^4} \right]$$

## Soluzione 2

a)

Indicando con  $E_0$  il campo elettrico nel vuoto e con  $E$  il campo elettrico nel dielettrico, avremo che essendo la componente del campo elettrico parallela alla superficie del dielettrico continua nel passaggio dal dielettrico al vuoto:

$$E_{\parallel} = E_{0\parallel} = E_0 \sin \theta.$$

La componente dello spostamento elettrico ortogonale alla superficie del dielettrico è anche essa continua, inoltre campo elettrico e spostamento elettrico sono legati dalla relazione  $D = \epsilon E$ , per cui:

$$\begin{aligned} D_{\perp} &= D_{0\perp} \\ \epsilon_0 \epsilon_r E_{\perp} &= \epsilon_0 E_{0\perp} \\ E_{\perp} = \frac{E_{0\perp}}{\epsilon_r} &= \frac{E_0 \cos \theta}{\epsilon_r}. \end{aligned}$$
$$E = E_0 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_r^2} + \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}$$

L'angolo  $\theta'$  formato da  $E$  con la normale alla superficie del dielettrico risulta quindi dato da:

$$\tan \theta' = \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} = \epsilon_r \tan \theta.$$

E si trova facilmente:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta}{\epsilon_r} \frac{1}{\left[ \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_r^2} + \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\left[ \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_r^2} + \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}}$$

b)

Applicando il teorema di Gauss per  $E$  ad una superficie cilindrica con asse perpendicolare alla superficie del dielettrico e basi  $S$  una all'interno del dielettrico e una all'esterno, avremo:

$$\begin{aligned} d\Phi = E_{0\perp} S - E_{\perp} S &= \frac{\sigma_p S}{\epsilon_0} \\ \sigma_p &= \epsilon_0 (E_{0\perp} - E_{\perp}) = \epsilon_0 E_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right). \end{aligned}$$

In alternativa si può calcolare l'intensità di polarizzazione  $P$  dentro il dielettrico e poi la carica di polarizzazione  $\sigma_P$ :

$$P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E \quad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}_{ext} = P \cos \theta'$$

che da quanto trovato in precedenza per  $E$  e  $\cos \theta'$  risulta:

$$\sigma_P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_0 \frac{\cos \theta}{\epsilon_r} = \epsilon_0 E_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)$$

come già trovato.

c)

La densità di energia elettrica all'interno del dielettrico è data da:

$$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r (E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_0^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_r^2} + \sin^2 \theta \right).$$

assumendo uniforme la densità di energia all'interno del dielettrico avremo per l'energia:

$$U_E(\theta) = \int u_E d\tau = dL^2 u_E = \frac{dL^2}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_0^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_r^2} + \sin^2 \theta \right).$$

d)

Il momento meccanico agente sul dielettrico è dato dalla somma della coppia meccanica dovuta alle forze elastiche applicate dalle due molle e dal momento dovuto al campo elettrostatico che tende a allineare la lastra nella direzione  $\theta = 0$  (l'energia elettrostatica all'interno del dielettrico calcolata in (c) è infatti minima per  $\theta = 0$ ). Avremo:

$$\begin{aligned} M_E &= -\frac{dU_E}{d\theta} = -\frac{dL^2}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_0^2 \left( -\frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\epsilon_r^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \right) = -dL^2 \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} E_0^2 \cos \theta \sin \theta (\epsilon_r^2 - 1); \\ M_k &= \frac{L^2 k}{2} (1 + \cos \theta) \sin \theta. \end{aligned}$$

Uguagliando a zero la somma dei due momenti e risolvendo rispetto a  $\theta$ :

$$\begin{aligned} -dL^2 \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} E_0^2 \cos \theta \sin \theta (\epsilon_r^2 - 1) + \frac{L^2 k}{2} (1 + \cos \theta) \sin \theta &= 0 \\ -d \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} E_0^2 \cos \theta (\epsilon_r^2 - 1) + \frac{k}{2} (1 + \cos \theta) &= 0 \\ \cos \theta &= \frac{\frac{k}{2}}{d \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} E_0^2 (\epsilon_r^2 - 1) - \frac{k}{2}} = \frac{\frac{k}{2}}{d \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} \left( \frac{V_0}{h} \right)^2 (\epsilon_r^2 - 1) - \frac{k}{2}}. \end{aligned}$$