Prova Scritta Elettromagnetismo - 5.7.2018

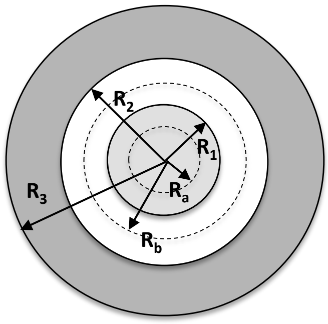
(a.a. 2017/18, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

---

recupero primo esonero: risolvere l'esercizio 1: tempo massimo 1.5 ore.
recupero secondo esonero: risolvere l'esercizio 2: tempo massimo 1.5 ore.
intero scritto: risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

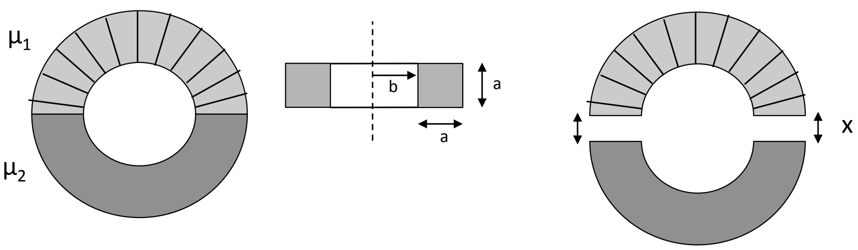
Un cilindro di lunghezza L molto grande, raggio $R_1 = 2\,m$ e costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$, è carico con una densità di carica $\rho = cr^2$, dove $c = 6\ \mu C\, m^{-5}$ e r è la distanza dall'asse in metri.
Il cilindro è circondato da uno strato cilindrico coassiale conduttore, molto lungo, con raggio interno $R_2 = 4\,m$ e raggio esterno $R_3 = 6\,m$, messo a terra. Nello spazio tra il cilindro e lo strato conduttore c'è il vuoto.
Determinare (dandone ove possibile i valori numerici):
a) la distribuzione di carica sul conduttore,
b) il flusso del campo elettrico attraverso una superficie cilindrica di raggio $R_b = 3\,m$ e lunghezza $l = 5\,m$, coassiale con il cilindro,
c) com'è distribuita la carica di polarizzazione nel dielettrico,
d) il potenziale a distanza $R_a = 1\,m$ dall'asse del sistema,
- Solo per il recupero del primo esonero:
e) l'energia elettrostatica per unità di lunghezza del sistema cilindrico.



Esercizio 2

Un toro magnetico con sezione quadrata di lato $a = 2\ cm$ e raggio interno $b = 3\ cm$ è composto da due parti semicircolari con permeabilità magnetica $\mu_{r1} = 100$ e $\mu_{r2} = 200$ come in figura. Sulla prima parte sono avvolte $N = 200$ spire percorse da una corrente costante $i = 3\ A$. Assumendo, come ragionevole, che le linee di campo all'interno di ciascuna parte siano semicirconferenze:
a) si trovi come varia il campo B in funzione della distanza r dall'asse del toro,
b) si calcoli la riluttanza del circuito magnetico,
c) si trovi come varia il campo se le due parti sono allontanate di una quantità x,
d) si calcoli la forza da applicare per staccare le due parti.

Per semplificare i calcoli si suggerisce di porre: $A = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}$
Inoltre nel quesito d) si ricordi che per l'energia magnetica di un circuito si può usare l'espressione: $U_m = \frac{1}{2}\Phi\, i$ *, dove* Φ *è il flusso concatenato con la corrente* i*.*



Soluzioni
Esercizio 1
a)
Essendo il campo elettrico nullo all'interno dello strato conduttore la carica indotta sulla sue superficie interna deve essere uguale ed opposta a quella sul cilindro interno.
Questa per unità di lunghezza è:

$$Q = \int_0^{R_1} 2\pi r \rho \, dr = \int_0^{R_1} 2\pi c r^3 \, dr = \frac{1}{2}\pi c R_1^4 = 1.51 \cdot 10^{-4} \ C/m$$

Ne segue una densità superficiale di carica:

$$\sigma(R_2) = -\frac{Q}{2\pi R_2} = -\frac{c}{4}\frac{R_1^4}{R_2} = -\, 6,0 \cdot 10^{-6} \ C/m^2$$

b)
Il flusso di campo attraverso una superficie cilindrica di raggio R_b e lunghezza l è:

$$\Phi_E(R_b) = \frac{Q\,l}{\epsilon_0} = 8.51 \cdot 10^7 \ V\,m$$

c)
Per la simmetria cilindrica, il vettore spostamento elettrico $\mathbf{D}$ ha solo la componente radiale. All'interno del dielettrico, dalla prima equazione di Maxwell si trova:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = cr^2 \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rD_r) = cr^2 \qquad D_r = \frac{c}{4}r^3$$

Il vettore intensità di polarizzazione è:

$$P_r = \chi\epsilon_0 E_r = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \frac{D_r}{\epsilon} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D_r = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{c}{4}r^3$$

La densità di carica di polarizzazione di volume è:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\rho \quad \text{oppure} \quad \rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rP_r) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} c\, r^2 = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\rho$$

e la densità di carica superficiale a $r = R_1$ è:

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{c}{4}R_1^3 = 9,0 \cdot 10^{-6} \ C/m^2$$

d)
Il campo elettrico all'interno del cilindro è:

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon} = \frac{c}{4\epsilon}r^3$$

Per $R_1 < r < R_2$ dal teorema di Gauss applicato a una superficie cilindrica di lunghezza unitaria e di raggio r:

$$2\pi r\, E_{0r} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad E_{0r} = \frac{c}{4\epsilon_0}\frac{R_1^4}{r}$$

E integrando:

$$V(R_a) = [V(R_a) - V(R_1)] + [V(R_1) - V(R_2)] = \int_{R_a}^{R_1} \frac{c}{4\epsilon}r^3\, dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{c}{4\epsilon_0}\frac{R_1^4}{r}\, dr =$$

$$V(R_a) = \frac{c}{4\epsilon_0}\left[\frac{1}{4\epsilon_r}(R_1^4 - R_a^4) + R_1^4 \log\frac{R_2}{R_1}\right] = 2.04 \cdot 10^6 \ V$$

e)
L'energia elettrostatica per unità di lunghezza è:

$$U_e = \int_0^{R_2} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} 2\pi r\, dr = \int_0^{R_1} \frac{E_r D_r}{2} 2\pi r\, dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0 E_{0r}^2}{2} 2\pi r\, dr =$$

$$U_e = \frac{1}{16}\frac{\pi c^2}{\epsilon}\int_0^{R_1} r^7\, dr + \frac{1}{16}\frac{\pi c^2}{\epsilon_0}R_1^8 \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\, dr = \frac{1}{16}\frac{\pi c^2}{\epsilon_0}R_1^8\left(\frac{1}{8\epsilon_r} + \log\frac{R_2}{R_1}\right) = 148,0 \ J/m$$

Esercizio 2

Poniamo:

$$A = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_{r1} + \mu_{r2}}{\mu_{r1}\mu_{r2}}$$

a)

Dal teorema della circuitazione:

$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = Ni \qquad H_1\ \pi r + H_2\ \pi r = Ni \qquad (H_1 + H_2)\ \pi r = Ni$$

da $B_1 = \mu_1\ H_1$ e $B_2 = \mu_2\ H_2$, tenendo conto che alla superficie di separazione tra i semitori $B_1 = B_2 = B$, si trova:

$$B\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)\ \pi r = Ni \qquad B(r) = \frac{Ni}{\pi A}\frac{1}{r}$$

b)

Il flusso di $B(r)$ attraverso una sezione del toro normale alle linee di forza di $B(r)$ è:

$$\Phi(B) = \int_b^{b+a} B(r)\ a\ dr = \frac{aNi}{\pi A}\int_b^{b+a} \frac{1}{r} dr = \frac{aNi}{\pi A} \log\frac{b+a}{b}$$

e quindi la riluttanza è.

$$\Re_T = \frac{Ni}{\Phi} = \frac{\pi A}{a}\frac{1}{\log\frac{b+a}{b}} = 3.67 \cdot 10^6\ N_{sp}\,\Omega^{-1}s^{-1}$$

Allo stesso risultato si arriva considerando la riluttanza di ciascun semitoro. Dobbiamo considerare ciascun semitoro scomposto in tanti semitori elementari lungo le linee di forza di B. Questi sono tra loro in parallelo: vanno quindi sommati gli inversi delle riluttanze di ciascun semitoro elementare:

$$d\ \frac{1}{\Re} = \mu\ \frac{1}{l}\ dS = \mu\ \frac{1}{\pi r}\ a\,dr$$

e integrando:

$$\frac{1}{\Re} = \int_b^{b+a} \mu\ \frac{1}{\pi r}\ a\,dr = \mu\ \frac{a}{\pi} \log\frac{b+a}{b} \qquad \Re = \frac{\pi}{a}\frac{1}{\mu}\frac{1}{\log\frac{b+a}{b}}$$

La riluttanza totale è data dalla serie delle riluttanze dei due semitori:

$$\Re_T = \Re_1 + \Re_2 = \frac{\pi}{a}\frac{1}{\log\frac{b+a}{b}}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \frac{\pi}{a}\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}\frac{1}{\log\frac{b+a}{b}} = \frac{\pi A}{a}\frac{1}{\log\frac{b+a}{b}}$$

c)

Se i semitori sono allontanati ad una distanza x nell'integrale della circuitazione si devono aggiungere i due traferri:

$$H_1\ \pi r + H_2\ \pi r + H_0\,2x = Ni$$

$$\pi r\left(\frac{B}{\mu_1} + \frac{B}{\mu_2}\right) + 2x\frac{B}{\mu_0} = Ni$$

$$B\left[\pi r A + \frac{2x}{\mu_0}\right] = Ni$$

Ne segue:

$$B(r) = \frac{Ni}{\pi r A + \frac{2x}{\mu_0}}$$

d)

Il flusso di B è:

$$\Phi(B) = \int_b^{b+a} B(r)\ a\ dr = aNi\int_b^{b+a} \frac{1}{\pi r A + \frac{2x}{\mu_0}}\ dr$$

$$\Phi(B) = \frac{aNi}{\pi A}\log\frac{\pi(b+a)A + \frac{2x}{\mu_0}}{\pi b A + \frac{2x}{\mu_0}} = \frac{aNi}{\pi A}\log\frac{\mu_0\pi(b+a)A + 2x}{\mu_0\pi b A + 2x}$$

Il flusso concatenato con la corrente è: $\Phi_T = N\Phi$ e l'energia magnetica nel circuito si trova facilmente dalla relazione:

$$U_m = \frac{1}{2}\Phi_T\, i = \frac{1}{2}N\Phi\, i = \frac{1}{2}\frac{aN^2\, i^2}{\pi A}\log\frac{\mu_0\pi(b+a)A+2x}{\mu_0\pi bA+2x}$$

La forza per staccare i semitori deve essere opposta maggiore in modulo della forza attrattiva e si trova (per $x \to 0$) dalla relazione:

$$F = -F_m = -\frac{dU_m}{dx}|_{x=0} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{N\, i}{\pi\, A}\right)^2 \frac{a^2}{(a+b)b} = 54.3\, N$$