

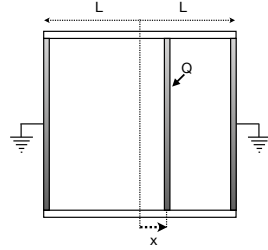
## Prova Scritta Elettromagnetismo - 6.11.2018

(a.a. 2017/18, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

### Esercizio 1

Un condensatore elettrico è formato da tre armature metalliche piane di area  $S = 0.25 \text{ m}^2$  poste parallelamente l'una rispetto all'altra. Le armature più esterne sono poste ad una distanza  $2L = 10 \text{ cm}$  (si assuma  $2L \ll \sqrt{S}$ ). Il sistema è chiuso sui lati da pareti in grado di mantenere isolato ermeticamente e l'interno del condensatore. Le due armature esterne sono fisse e collegate a terra, mentre l'armatura interna è carica con una carica elettrica  $Q = 1.0 \text{ mC}$  e può scorrere orizzontalmente senza attrito mantenendo ermeticamente isolate le due intercapedini tra essa e le armature esterne (vedi figura). Lo spazio tra le tre armature è riempito da un gas ideale con costante dielettrica  $\epsilon_r = 1$ . Il gas non può passare da destra a sinistra dell'armatura, e i due volumi si trovano alla stessa pressione  $p_0 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  quando  $x = 0$  (equidistante tra le due armature). Tutte le armature sono termicamente conduttive e il sistema è in contatto con un bagno termico alla temperatura costante  $T$ .



Determinare:

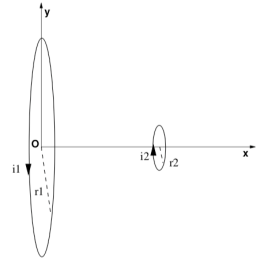
- la capacità del condensatore in funzione della posizione  $x$  (vedi figura) della lastra centrale rispetto alla posizione equidistante dalle due armature esterne;
- la forza elettrostatica che agisce sulla armatura centrale quando questa si trova nella posizione  $x$ ;
- il valore della(e) posizione(i)  $x_0$  per le quali l'armatura centrale si trova in equilibrio stabile, sapendo che l'armatura centrale si comporta come un conduttore termico perfetto.

### Esercizio 2

Una spira circolare di raggio  $r_1 = 35 \text{ cm}$  è percorsa da una corrente  $i_1 = 2.5 \text{ A}$ . Una seconda spira di raggio  $r_2 = 2.7 \text{ mm}$  (sufficientemente piccolo da consentire l'approssimazione in cui  $r_2 \ll r_1$ ) con centro sull'asse della prima spira e con piano parallelo ad essa, è percorsa da corrente  $i_2 = 0.85 \text{ A}$  in verso opposto rispetto a  $i_1$  ed è libera di muoversi lungo l'asse con moto traslatorio. Le correnti  $i_1$  e  $i_2$  nelle due spire sono mantenute costanti da opportuni generatori. Denotiamo con  $L_1$  ed  $L_2$  i coefficienti di autoinduzione delle due spire.

Determinare:

- l'espressione del coefficiente di mutua induzione  $\mathcal{M}$  tra le due spire in funzione della loro distanza;
- l'espressione dell'energia magnetica  $U_m$  del sistema;
- il valore della forza (specificando se attrattiva o repulsiva) tra le due spire quando la loro distanza è pari a  $d = 5r_1/3$ ;
- il lavoro necessario per portare la spira di raggio  $r_2$  dall'infinito fino al centro della prima spira.



**Soluzione**  
**Esercizio 1**

a)

Le due armature esterne si trovano allo stesso potenziale elettrico (quello della terra) e quindi il sistema è equivalente a due condensatori piani in parallelo con distanza tra le armature  $L + x$  e  $L - x$  rispettivamente, per cui:

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) = \frac{\epsilon_0 S}{L + x} + \frac{\epsilon_0 S}{L - x} = \frac{\epsilon_0 2LS}{L^2 - x^2}$$

b)

Il condensatore è isolato, quando l'armatura centrale viene mossa lungo  $x$  deve essere compiuto del lavoro contro la forza elettrostatica  $F_e = -\frac{dU_E}{dx}|_{Q=const}$  per cui:

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} = \frac{1}{2} \frac{Q^2(L^2 - x^2)}{2\epsilon_0 LS};$$
$$F_e = -\frac{dU_E}{dx}|_{Q=const} = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 LS} > 0.$$

c)

Poiché le armature sono conduttori termici ideali e il sistema è immerso in un bagno termico a temperatura  $T$  possiamo considerare isotermico il sistema durante lo spostamento  $x$  dell'armatura centrale, e possiamo quindi utilizzare la legge di Boyle per esprimere le pressioni nelle intercapedini a destra e sinistra dell'armatura centrale come:

$$p_{sx} = \frac{p_0 L}{L + x};$$
$$p_{dx} = \frac{p_0 L}{L - x};$$

ed ottenere la forza di pressione che agisce sull'armatura centrale come:

$$F_p = S(p_{dx} - p_{sx}) = -\frac{2p_0 LSx}{L^2 - x^2};$$

che eguagliata alla forza elettrostatica fornisce le posizioni di equilibrio:

$$\frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 LS} = S(p_{dx} - p_{sx}) = -\frac{2p_0 LSx}{L^2 - x^2} \rightarrow$$
$$x = \pm L \left( 1 - \frac{4p_0 \epsilon_0 S^2}{Q^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm 4.4 \text{ cm}$$

## Esercizio 2

a)

Il coefficiente di mutua induzione tra due circuiti percorsi dalla corrente  $i_1$  e  $i_2$  è definito come

$$\mathcal{M} = \frac{\Phi_2(B_1)}{i_1}$$

Possiamo assumere che sulla spira 2 il campo generato dalla spira 1 sia costante (fissata la distanza  $x$ ), pari a

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 r_1^2 i_1}{2(r_1^2 + x^2)^{3/2}}$$

da cui

$$\mathcal{M}(x) = -\frac{\pi r_2^2 B_1}{i_1} = -\frac{\mu_0 \pi r_1^2 r_2^2}{2(r_1^2 + x^2)^{3/2}}$$

Il segno negativo dipende dal verso di percorrenza delle correnti che determina un flusso concatenato negativo.

b)

L'energia magnetica del sistema vale

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \mathcal{M} i_1 i_2$$

c)

Essendo le correnti mantenute costanti, la forza tra i due circuiti è data dalla derivata rispetto ad  $x$  dell'energia magnetica con il segno positivo, ed, essendo dipendente da  $x$  il solo termine di mutua interazione, si ottiene una forza repulsiva pari a:

$$F_m = +\frac{dU_m}{dx} = i_1 i_2 \frac{d\mathcal{M}}{dx} = \frac{3i_1 i_2 \mu_0 \pi r_1^2 r_2^2}{2} \frac{x}{(r_1^2 + x^2)^{5/2}} = 4.5 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

d)

Il lavoro  $L$  per portare la seconda spira dall'infinito ad  $x = 0$  vale

$$L = \int_{\infty}^0 -\vec{F}_m \cdot \vec{ds} = -\int_{\infty}^0 dU_m = U_m(\infty) - U_m(0) = -i_1 i_2 \mathcal{M}(0) = \frac{i_1 i_2 \mu_0 \pi r_2^2}{2r_1} = 8.7 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$