Prova Scritta Elettromagnetismo - 8.02.2019

(a.a. 2017/18, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

---

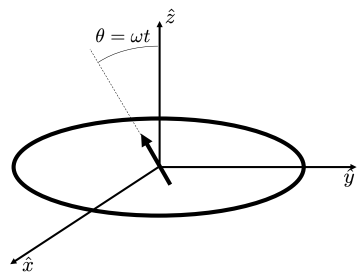
risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Una carica elettrica $Q = 2.5\,\mu\mathrm{C}$ è distribuita su un volume sferico di raggio $R = 10.0\,\mathrm{cm}$ con densità $\rho(r) = \alpha r^2$ dipendente solo dalla distanza radiale dal centro essendo α costante.
Si determini:
a) il valore della costante α;
b) come varia il campo elettrico all'interno e all'esterno della sfera;
c) l'energia elettrostatica totale;
d) il potenziale elettrico al centro della sfera e sulla superficie riferiti a un potenziale nullo a distanza infinita.

Esercizio 2

Una dipolo magnetico di momento magnetico $m = 4.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Am}^2$ è posto al centro di una spira circolare di raggio $a = 2.5\,\mathrm{cm}$, e resistenza elettrica $R = 2.0\,\mathrm{m\Omega}$. Il sistema di assi cartesiani è definito in modo che l'origine sia nel centro della spira e gli assi $\hat{x}$ e $\hat{y}$ nel suo piano. Il dipolo viene fatto ruotare con velocità angolare costante $\omega = 1500\,\mathrm{rad/s}$ nel piano $\hat{y}, \hat{z}$.
Si determini:
a) l'espressione della corrente che scorre nella spira, e il suo valore massimo (trascurando il coefficiente di autoinduzione della spira);
b) l'espressione del momento meccanico esterno necessario a mantenere il dipolo in rotazione, e il suo valore medio;
c) Si mostri che la potenza meccanica fornita è eguale alla potenza dissipata per effetto Joule, e si calcoli la potenza media dissipata.



Soluzione
Esercizio 1
a)
Integrando sul volume sferico si trova:

$$Q = \int_0^R \alpha r^2\, 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi\alpha}{5} R^5 \qquad \alpha = \frac{5}{4\pi}\frac{Q}{R^5} = 0.10\,\mathrm{C/m^5}$$

b)
Dalla prima equazione di Maxwell, scrivendo la divergenza in coordinate sferiche, all'interno della sfera si trova:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E_r(r)) = \frac{\alpha r^2}{\epsilon_0} \quad\rightarrow\quad r^2 E_r(r)\Big|_0^r = \int_0^r \frac{\alpha r^4}{\epsilon_0} dr$$

$$E_r(r) = \frac{\alpha}{5\epsilon_0} r^3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^5} r^3$$

Anche dal teorema di Gauss:

$$\Phi(E_r) = 4\pi r^2\, E_r = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr$$

All'esterno ricordando le proprietà della distribuzione sferica o dal teorema di Gauss si trova:

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

c)
L'energia elettrostatica si calcola integrando la densità da $r = 0$ a $r = \infty$:

$$U_{es} = \int_0^\infty \frac{1}{2}\epsilon_0 E_r^2\, 4\pi r^2\, dr = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_0^R \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^5}\right)^2 r^6\, 4\pi r^2\, dr + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_R^\infty \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2\, dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R} = 0.56\,\mathrm{J}$$

d)
Per il calcolo del potenziale possiamo scrivere:

$$V(R) - V(0) = -\int_0^R E_r(r) dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^5}\int_0^R r^3 dr = -\frac{1}{4}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}$$

$$V(0) = V(R) + \frac{1}{4}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}$$

inoltre:

$$V(\infty) - V(R) = -\int_R^\infty E_r(r) dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}$$

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = 225\,\mathrm{kV} \qquad V(0) = \frac{5}{4}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = 281\,\mathrm{kV}$$

Esercizio 2
a)
La corrente sulla spira è dovuta alla forza elettromotrice indotta dalla variazione del flusso del campo magnetico:

$$fem. = -\frac{d\Phi_2(\mathbf{B_1})}{dt}$$

dove abbiamo indicato con il pedice 1 il diplo magnetico e con il pedice 2 la spira. Il calcolo del campo magnetico su tutta la superficie della spira è complicato, ma è possibile semplificarlo tenendo conto della mutua induzione:

$$\Phi_2(\mathbf{B_1}) = M_{21} I_1$$

e del fatto che il coefficiente di mutua è simmetrico:

$$M = M_{21} = M_{12} = \frac{\Phi_1(\mathbf{B_2})}{I_2}$$

È facile calcolare il flusso del campo magnetico dovuto alla spira, sul piccolo dipolo elettrico. Se nella spira passasse una corrente I_2, il campo di induzione magnetica al centro della spira sarebbe

$$\mathbf{B_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2a}\hat{z}$$

Possiamo considerare il dipolo magnetico come una piccola spira di area S, percorsa dalla corrente I_1, per cui $S = m/I_1$. Il coefficiente di mutua induzione vale:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{\int \mathbf{B}\cdot\hat{n}dS}{I_2} \\ &= \frac{\mu_0 I_2}{2aI_2}S\cos\omega t \\ &= \frac{\mu_0}{2a}\frac{m}{I_1}\cos\omega t \end{aligned}$$

A questo punto possiamo calcolare la forza elettromotrice indotta indotta sulla spira come:

$$fem = -\frac{d}{dt}(M_{12}I_1) = -\frac{\mu_0 m I_1}{2aI_1}\frac{d}{dt}\cos\omega t = \frac{\mu_0 m}{2a}\omega\sin\omega t$$

e la corrente indotta vale

$$I_2(t) = \frac{\mu_0 m}{2aR}\omega\sin\omega t$$

che ha come valore massimo

$$I_{2,max} = \frac{\mu_0 m}{2aR}\omega = 8.5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{A}$$

b)
Il momento meccanico che agisce sul dipolo a causa del campo magnetico generato dalla spira vale

$$\mathbf{M_{int}} = \mathbf{m}\times\mathbf{B}$$

Per cui il momento magnetico esterno vale

$$\mathbf{M_{ext}} = -\mathbf{M_{int}} = -\mathbf{m}\times\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_2 m}{2a}\sin\omega t$$

inserendo il risultato per $I_2(t)$ alla domanda precedente, e tenendo conto che la sola componente diversa da zero quella diretta lungo l'asse $\hat{x}$, si ha

$$M_{ext,x} = \left(\frac{\mu_0 m}{2a}\right)^2\frac{\omega}{R}\sin^2\omega t$$

per quanto riguarda il segno, si nota che il dipolo magnetico tende ad allinearsi al campo magnetico. Quindi, per angoli θ ta 0 e $/pi/2$, quando la corrente circola in verso orario nella spira, il momento esterno deve avere segno positivo.
Il valore medio vale

$$\langle M_{ext,x}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 m}{2a}\right)^2\frac{\omega}{R} = 4.8\cdot 10^{-9}\,\mathrm{Nm}$$

c)
La potenza meccanica per mantenere in moto il dipolo vale

$$P = M_{ext,x}\omega = \left(\frac{\mu_0 m}{2a}\right)^2\frac{\omega^2}{R}\sin^2\omega t$$

La potenza dissipata per effetto Joule vale:

$$P = \frac{fem^2}{R} = \left(\frac{\mu_0 m}{2a}\omega\sin\omega t\right)^2\frac{1}{R}$$

Le due potenze sono quindi uguali. La potenza media vale:

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 m}{2a}\right)^2\frac{\omega^2}{R} = 7.1\cdot 10^{-6}\,\mathrm{W}$$