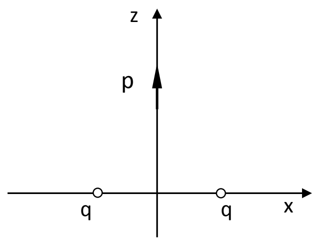
Prova Scritta Elettromagnetismo - 28.01.2019

(a.a. 2017/18, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

---

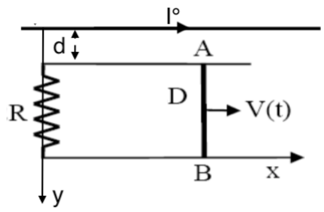
risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1



Un piccolo dipolo elettrico di momento $p = 1.2$ nC m, assimilabile a una piccola sbarretta di lunghezza $l = 1$ cm, di sezione trascurabile e massa $m = 10$ g, ha il suo baricentro vincolato a stare sull'asse z. Il dipolo è sottoposto al campo elettrico generato da due cariche puntiformi negative uguali $q = -1.5$ nC poste nei punti $(x_1, 0, 0)$ e $(-x_1, 0, 0)$ con $x_1 = 15$ cm. Il dipolo è inizialmente orientato in direzione $\hat{z}$.
Si determini:
a) in quali posizioni lungo l'asse z la forza sul dipolo è nulla;
b) i valori della forza sul dipolo nell'origine degli assi e nel punto $(0, z = x_1)$;
c) il periodo delle piccole oscillazioni se, dopo aver vincolato il suo baricentro nella posizione $(0, z = x_1)$ e averlo ruotato di poco rispetto all'asse z, viene lasciato libero di ruotare nel piano $x - z$;
d) la velocità finale se è rimosso il vincolo che lo blocca nella posizione $(0, z = x_1)$.

Esercizio 2



Un circuito elettrico è costituito da due binari conduttori paralleli di resistenza trascurabile posti ad una distanza $D = 1.4$ m, da un conduttore fisso di resistenza $R = 2.0\,\Omega$ e da un'asta metallica AB di resistenza trascurabile che può scorrere senza attrito sui due binari (vedi figura). La posizione dell'asta AB varia nel tempo secondo la relazione $x(t) = x_0(1 - \cos\omega t)$, con $x_0 = 50.0$ cm e $\omega = 2\pi$ rad/s costanti positive note. Il circuito è posizionato tra le espansioni polari di un magnete che produce un campo di induzione magnetica B_1, diretto perpendicolarmente al piano del circuito in verso uscente dal piano della figura, la cui intensità varia nel tempo secondo la relazione $B_1(t) = B_0(1 + \cos\omega t)$, con $B_0 = 1.5$ T costante positiva nota. Inoltre parallelamente ad uno dei lati del circuito a distanza $d = 5.0$ mm da questo, è posto un filo conduttore percorso da una corrente costante $I^\circ = 2.0$ A. Determinare:
a) la forza elettromotrice indotta nel circuito;
b) l'espressione dell'intensità di corrente che circola nel circuito ed il suo valore numerico per $t = \frac{\pi}{2\omega}$ s;
c) la forza che agisce sull'asta AB per $t = \frac{\pi}{2\omega}$ s

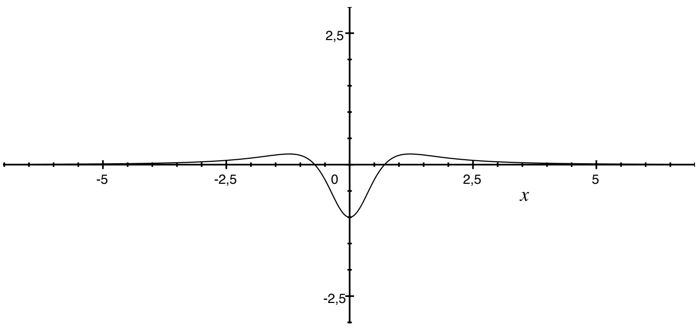
Soluzione
Esercizio 1
a)
Sull'asse z il campo elettrico, somma vettoriale, dei campi elettrici prodotti dalle due cariche puntiformi ha la sola componente z:

$$E_z(z) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{[x_1^2+z^2]}\frac{z}{[x_1^2+z^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{z}{[x_1^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

La forza sul dipolo è $\vec{F} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$ e sull'asse z ha non nulla solo la componente z:

$$F_z = p\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{z}{[x_1^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{pq}{2\pi\epsilon_0}\frac{x_1^2-2z^2}{[x_1^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}$$

che si annulla per $z = \pm x_1/\sqrt{2}$ =±10.6 cm.
La forza è positiva per $z < -x_1/\sqrt{2}$ e $z > x_1/\sqrt{2}$ e negativa per $-x_1/\sqrt{2} < z < x_1/\sqrt{2}$, (vedi figura in unità arbitrarie, $x_1 = 1$)



b)
Nell'origine degli assi:

$$F_z(0) = \frac{pq}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{x_1^3} = -9.6\cdot10^{-6}\ \mathrm{N}$$

e in $z = x_1$:

$$F_z(x_1) = -\frac{pq}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0}\frac{1}{x_1^3} = 1.7\cdot10^{-6}\ \mathrm{N}$$

c)
Il momento meccanico $\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}$ ha non nulla la sola componente y:

$$M_y = -p_xE_z(z=x_1) = -pE_z\sin\theta \simeq -pE_z\theta$$

l'equazione delle piccole oscillazioni è :

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -pE_z\theta$$

dalla quale il periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{pE_z}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{12\,pE_z}} = 1.0\cdot10^3\ \mathrm{s}$$

d)
L'energia elettrostatica del dipolo nella posizione $(0, z = x_1)$ è:

$$U_{es}(z=x_1) = -\vec{p}\cdot\vec{E}(z=x_1) = -\frac{pq}{\pi\epsilon_0}\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{x_1^2}$$

Essendo la forza positiva, il dipolo è accelerato nella direzione dell'asse z e va all'infinito muovendosi sull'asse z. Per la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 = U_{es}(z=x_1)$$

$$v(+\infty) = \sqrt{\frac{-pq}{2\sqrt{2}\,m\pi\epsilon_0}\frac{1}{x_1}} = 3.6\ \mathrm{cm/s}$$

Esercizio 2

a)
Il campo di induzione magnetica concatenato con il circuito è dovuto al contributo del campo prodotto dal magnete $B_1(t)$, uniforme e diretto perpendicolarmente al circuito in verso uscente dal foglio, e dal campo prodotto dal filo percorso da corrente, B_2, dato dalla legge di Biot-Savart, diretto perpendicolarmente al circuito con verso opposto a B_1. Il flusso concatenato con il circuito è dato da:

$$\begin{aligned} B(t) &= B_0(1+\cos\omega t) - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^\circ}{y+d}; \\ \Phi &= B_0(1+\cos\omega t)Dx(t) - \int_0^D \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^\circ}{y+d}x(t)dy = B_0(1+\cos\omega t)Dx(t) - \frac{\mu_0 I^\circ}{2\pi}\ln\frac{D+d}{d}x(t); \end{aligned}$$

La forza elettromotrice indotta nel circuito è quindi:

$$\begin{aligned} f_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_0(1+\cos\omega t)Dx_0(1-\cos\omega t)) - \frac{d}{dt}(-\frac{\mu_0 I^\circ}{2\pi}\ln\frac{D+d}{d}x_0(1-\cos\omega t)) = \\ &= -2B_0Dx_0\omega\cos\omega t\sin\omega t + \frac{\mu_0 I^\circ}{2\pi}\ln\frac{D+d}{d}x_0\omega\sin\omega t; \end{aligned}$$

b)
La corrente indotta corrispondete vale:

$$\begin{aligned} i_i &= \frac{f_i}{R} = -\frac{2B_0Dx_0}{R}\omega\cos\omega t\sin\omega t + \frac{\mu_0 I^\circ}{R2\pi}\ln\frac{D+d}{d}x_0\omega\sin\omega t \\ i_i(t=\frac{\pi}{2\omega}) &= \frac{\mu_0 I^\circ}{R2\pi}\ln\frac{D+d}{d}x_0\omega = 3.5\,\mu\text{A} \end{aligned}$$

c)
La forza che agisce sull'asta AB può essere calcolata direttamente dalla legge di Laplace $d\vec{F} = id\vec{l}\times\vec{B} = i_i d\vec{l}\times(\vec{B}_1+\vec{B}_2)$:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{\mu_0 I^\circ}{R2\pi}\ln\frac{D+d}{d}x_0\omega DB_0 = 7.4\ 10^{-6}\,\text{N}; \\ F_2 &= i_i\int_0^D \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^\circ}{y+d}dy = (\frac{\mu_0 I^\circ}{R2\pi}\ln\frac{D+d}{d}x_0\omega)\frac{\mu_0 I^\circ}{2\pi}\ln\frac{D+d}{d} = 8.0\ 10^{-12}\,\text{N}. \end{aligned}$$