

## Prova scritta del 4/4/2005 per il corso di Elettricità e Magnetismo

a. a. 2004/2005

(Proff. F.Lacava, C.Mariani, F.Ricci)

### Esercizio 1

Due sfere conduttrici molto lontane tra loro, cariche e isolate, hanno raggio  $R_1 = 20 \text{ cm}$  ed  $R_2 = 35 \text{ cm}$  rispettivamente. La sfera 1 si trova a potenziale  $V_1 = -0.72 \cdot 10^3 \text{ V}$  rispetto a terra e la sfera 2 ha carica  $Q_2 = 3.9 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ .

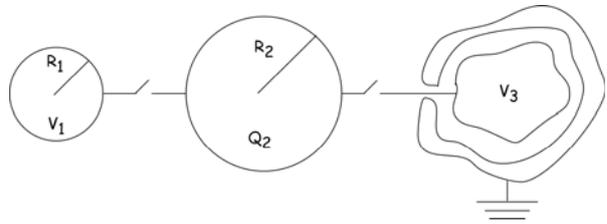
A grande distanza dalle sfere è situato un condensatore costituito da un corpo conduttore isolato e carico al potenziale  $V_3 = 3.0 \cdot 10^3 \text{ V}$  rispetto a terra, contenuto in un conduttore cavo collegato a terra.

Le due sfere e il conduttore interno vengono poi collegati tra di loro mediante un filo sottile metallico di capacità trascurabile.

Sia  $V_2' = 1.4 \cdot 10^3 \text{ V}$  il nuovo valore assunto dal potenziale della sfera 2 rispetto a terra.

Determinare:

- a) La capacità  $C_3$  del condensatore;
- b) La carica finale della sfera 1;
- c) La variazione di energia elettrostatica totale;

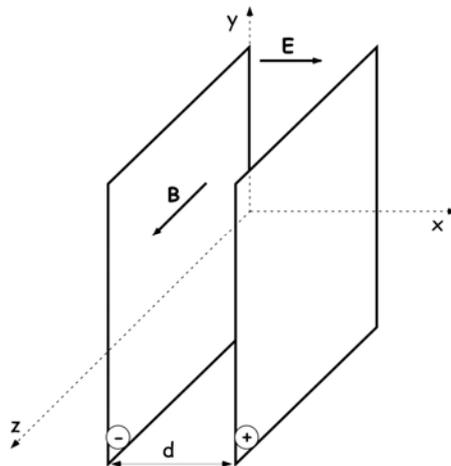


### Esercizio 2

Un elettrone viene tenuto inizialmente nelle immediate vicinanze della piastra negativa di un condensatore piano. Tra le due armature, poste a distanza  $d$ , esiste una differenza di potenziale  $V$  e, inoltre, lo spazio racchiuso tra le armature è sede di un campo magnetico  $B$  uniforme e costante, parallelo alle armature. Scelto un sistema di riferimento con origine sulla piastra negativa ed asse  $x$  diretto ortogonalmente alle piastre, così che le piastre siano parallele al piano  $yz$ , si potrà quindi assegnare al campo magnetico la direzione  $z$  positiva (si veda la figura). All'istante  $t=0$  l'elettrone viene lasciato libero con velocità nulla.

- a) Si calcoli l'energia cinetica dell'elettrone quando ha raggiunto la distanza  $x_1=d/20$  dalla piastra negativa.
- b) Si calcolino le espressioni delle componenti della forza risultante agente sull'elettrone, e quindi si deduca la componente  $y$  della velocità posseduta dall'elettrone quando ha raggiunto la distanza  $x_1=d/20$  dalla piastra negativa.
- c) Si determini la massima distanza possibile dell'elettrone dalla piastra negativa, verificando che l'elettrone non arrivi a toccare la piastra positiva.
- d) Tenendo fissato il valore di  $B$ , si trovi il più piccolo valore  $V$  che andrebbe assegnato alla differenza di potenziale  $V$  per far sì che l'elettrone possa raggiungere la piastra positiva.

(Dati:  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $d = 0.5 \text{ mm}$ ,  $B = 1 \text{ T}$ ,  $V = 3 \text{ kV}$ )



### Soluzione Esercizio 1:

Le sfere hanno capacità  $C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1$  e  $C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2$  rispettivamente; sia  $C_3$  la capacità del condensatore.

Il sistema si può schematizzare con tre condensatori in parallelo di capacità  $(C_1, C_2, C_3)$ .

Poiché il sistema sei tre condensatori è isolato, sia prima che dopo il loro collegamento la carica totale deve essere la stessa:

$$C_1 V_1 + Q_2 + C_3 V_3 = (C_1 + C_2 + C_3) V_2'$$

Per cui si ricava:

a) La capacità del condensatore:

$$C_3 = \frac{(C_1 V_1 + Q_2 - (C_1 + C_2) V_2')}{(V_2' - V_3)} = 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

b) La carica finale della sfera 1 è uguale a  $C_1 V_2' = 3,1 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ .

c) La variazione di energia elettrostatica totale è:

$$\Delta U_{tot} = \frac{1}{2} (C_1 + C_2 + C_3) (V_2')^2 - \frac{1}{2} \left( C_1 (V_1)^2 + \frac{(Q_2)^2}{C_2} + C_3 (V_3)^2 \right) = -1,0 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

### Soluzione Esercizio 2

a) Il lavoro fatto dalla forza magnetica è nullo, mentre quello della forza elettrica, quando l'elettrone dall'armatura negativa ha raggiunto la distanza  $d/20$  dalla lastra negativa è

$$L = -eEd/20 = e\Delta V/20,$$

quindi

$$K(d/20) = mV^2/2 = e\Delta V/20$$

b) Tenendo conto del fatto che

$$\mathbf{F} = e \left( \frac{\Delta V}{d} - v_y B \right) \mathbf{I} + ev_x B \mathbf{J}.$$

si trova facilmente che appunto

$$m_e \frac{dv_y}{dt} = eBv_x = eB \frac{dx}{dt},$$

e quindi integrando si trova la relazione

$$v_y = eBx/m_e$$

dove  $x$  denota la distanza dell'elettrone dalla piastra negativa.

Per  $x=d/20$  quindi si trova

$$v_y = eBd/(20m_e)$$

c) Il valore  $X$  di massima distanza dell'elettrone dalla piastra negativa dovrà coincidere con il punto in cui la componente  $x$  della velocità (che nel primo tratto di traiettoria è positiva) si annulla. E quindi  $X$  sarà identificabile come il valore di  $x$  compatibile con la richiesta che tutto il lavoro fatto dalle forze sia convertito in  $mv_y^2/2$ . Quindi  $X$  sarà ottenibile dalla relazione

$$\frac{1}{2} m_e v_y^2 = eX \frac{\Delta V}{d}.$$

dove, alla luce della osservazione riportata al punto precedente,

$$V_y = eBX/m_e$$

Quindi

$$X = 2 \frac{m_e}{eB^2} \frac{\Delta V}{d} = 6.8 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

ed inserendo i dati del problema si trova che  $X = \dots$ . Essendo questo  $X < d$  si deduce che, nelle condizioni specificate dai dati del problema, l'elettrone non raggiunge la lastra positiva.

d) Alla luce delle considerazioni riportate nella discussione del punto precedente e' evidente che la differenza di potenziale sara' giusto sufficiente a far raggiungere all'elettrone la lastra positiva se

$$\Delta V = eB^2 d^2 / (2m_e) = 22 \text{ kV}$$