Soluzione dell'Esercizio 1

La capacità del condensatore è:

$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = 11{,}1\ nF$ e la costante di tempo è $\tau = RC = 0{,}11\ \mu s \ll T = 10\ \mu s$.

L'equazione del circuito è: $f - V_C = Ri$

che si trasforma nell'equazione: $f(t) - \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt}$ $\qquad at - \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt}$

che differenziata diventa: $a - \frac{i}{C} = R\frac{di}{dt}$ cioè: $Ca - i = CR\frac{di}{dt}$

$\frac{di}{Ca-i} = \frac{dt}{\tau}$ dalla quale: $i(t) = aC\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Quest'ultima può essere integrata per ottenere la carica: $Q(t) = aC\left(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + Q_0$ con $Q_0 = -a\tau C$ da $Q(t) = 0$ per $t = 0$.

$\{$ Si poteva anche integrare l'equazione differenziale in Q(t) : $\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{a}{R}t$

Aggiungendo all'integrale dell'equazione omogenea $Q_{om}(t) = Q_{0om}\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ l'integrale particolare

sotto forma di polinomio $P(t) = \alpha t + \beta$. Sostituendo $P(t)$ nell'equazione si trovano i coefficienti α e β : $P(t) = aC\,t - aC\,\tau$ e quindi:

$Q(t) = aC\left(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - aC\tau$ essendo $Q_{0om} = aC\tau$ da $Q(0) = 0$ $\}$.

Il capo elettrico all'interno del condensatore è: $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{aC}{\varepsilon_0 S}\left(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

E quindi la densità di corrente di spostamento è: $J_S = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{aC}{S}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Alla distanza r dall'asse del condensatore per il teorema della circuitazione abbiamo:

$2\pi r \cdot B = \mu_0\, J_S\, \pi r^2$ e quindi si trova: $B(r) = \frac{\mu_0}{2\,r}\frac{aC}{S}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Il campo a distanza b sarà: $B(b) = \frac{\mu_0}{2\,b}\frac{aC}{S}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

E quindi l'angolo θ che l'aghetto forma col campo magnetico terrestre B_T è dato da:

$$\theta \simeq tg(\theta) = \frac{B(b)}{B_T} = 2{,}47 \cdot 10^{-2}\ \text{rad} \quad .$$

Soluzione dell'Esercizio 2

Quando il carrello entra nel campo magnetico nel lato delle spire parallelo all'asse agisce un campo $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ (flusso tagliato), ne risulta una $f = NEl = NBlv$ (anche $f = -\frac{d\Phi}{dt}$) che fa passare una corrente nell'avvolgimento pari a $i = \frac{NBlv}{R}$ dove R è la resistenza totale delle N spire quadrate.

$$R = \rho \frac{4\, l\, N}{\pi r^2} = 0{,}693\ \Omega$$

<u>Senza determinare i valori numerici andiamo ora avanti nella soluzione analitica dell'esercizio!!!</u>

Il passaggio della corrente determina una forza che si oppone al moto del carrello:

$$F = N\,(i\,B\,l) = \frac{(NBl)^2}{R}\ v$$

E quindi l'equazione del moto è:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{(NBl)^2}{R}\ v$$

che si integra facilmente: $v = v_o\ e^{-\frac{t}{\tau}}$ con $\tau = \frac{mR}{(NBl)^2}$.

Ne segue una corrente che passa nella spira $i(t) = \frac{NBl}{R}\ v_o\ e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Integrando $\frac{ds}{dt} = v$ si trova $t^* = -\tau \ln\left(1 - \frac{l}{v_o\,\tau}\right)$ per il tempo impiegato dalla spira per entrare del tutto nella zona di campo magnetico.

E quindi una velocità $v^* = v_o\ e^{-\frac{t^*}{\tau}} = v_o - \frac{l}{\tau}$ dopo che il carrello è entrato totalmente nel campo magnetico.

Successivamente la forza risultante è nulla ($\frac{d\Phi}{dt} = 0$): il carrello procede a velocità costante e non c'è corrente nel circuito.

Quando il carrello si presenta alla fine della zona di campo magnetico si possono scrivere le equazioni già scritte con ovvie modifiche e si ottiene:

$$v = v^*\, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad\qquad I(t) = \frac{NBl}{R}\ v^*\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Inoltre il carrello esce dal campo in un intervallo di tempo $t^{**} = -\tau \ln\left(1 - \frac{l}{v^* \tau}\right)$

con una velocità $v^{**} = v^* e^{-\frac{t^{**}}{\tau}} = v^* - \frac{l}{\tau} = v_o - \frac{2l}{\tau}$.

All'ingresso e all'uscita la quantità totale di carica fluita nell'avvolgimento è :

$Q = \frac{NBS}{R}$ (Legge di Felici) con segno scambiato tra ingresso e uscita.

(Allo stesso risultato si arriva integrando la $i(t)$).

A questo punto, se mettiamo i valori numerici dati, troviamo *v** = -2,3·10^5 m/s, un valore negativo non accettabile secondo quanto detto nel testo. Se *v** < 0 dobbiamo concludere che il carrello si ferma prima che l'avvolgimento entri del tutto nel campo magnetico. Si può quindi vedere come vanno le cose in questo caso.

Naturalmente *v(t)* e $i(t)$ variano come già trovato sopra perché le equazioni di partenza sono le stesse:

$$v = v_o \, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad\qquad i(t) = \frac{NBl}{R} \, v_o \, e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

La velocità si annulla per t = ∞.

L'equazione della posizione è: $\frac{dx}{dt} = v_o \, e^{-\frac{t}{\tau}}$ che integrata diventa $\Delta x = v_o \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tau$

che per t = ∞ diventa $\Delta x = v_o \, \tau = 2{,}17 \cdot 10^{-7}$ m .

Quindi il carrello inizia ad entrare nella zona con campo magnetico ma la forza che si oppone al suo moto lo ferma dopo che è penetrato per uno tratto Δx .

Integrando la corrente I(t) tra t = 0 e t = ∞ si ottiene $Q = \frac{NBl\Delta x}{R} = 30{,}1 \cdot 10^{-6}$ C .

Grafici da aggiungere.