I prova di esonero del corso di Elettromagnetismo (a.a. 2009/2010)

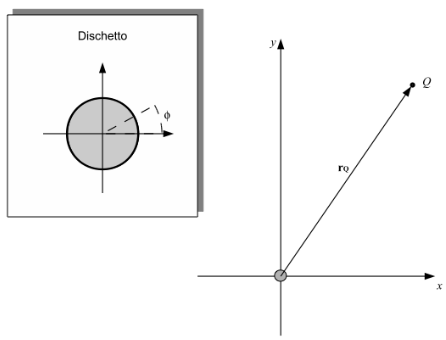
(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)

23 aprile 2010

Esercizio 1

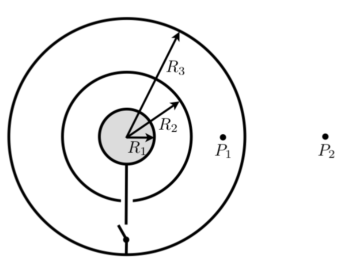
Un dischetto sottile di raggio R, costituito da materiale isolante a densità di massa uniforme, possiede una densità di carica superficiale $\sigma = \sigma_o \sin\phi + \sigma_1$. Fissato il sistema di riferimento mostrato in figura, si calcolino
a) le componenti del vettore momento di dipolo e la carica totale del dischetto.
Una carica puntiforme Q viene posta ora nel punto individuato dal vettore $\vec{r}_Q$ ($|\vec{r}_Q| \gg R$). Nell'ipotesi che il dischetto sia vincolato nella sua posizione iniziale, si calcoli:
b) la forza dovuta al campo elettrico che si esercita fra il dischetto e la carica Q;
c) il momento meccanico dovuto al campo elettrico che agisce sul dischetto.
Sia ora fissato il centro di massa del dischetto nell'origine del sistema di riferimento, ma si lasci il disco libero di ruotare attorno all'asse z perpendicolare al disco stesso e passante per il suo centro. In questa nuova condizione,
d) si individuino le posizioni di equilibrio stabile e instabile del dischetto,
e) si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni del dischetto attorno alla posizione di equilibrio stabile. (Si ricorda che il momento di inerzia di un disco di densità di massa uniforme, attorno al suo asse è $I = \frac{mR^2}{2}$).

Dati: R=2 mm, m =0.2 mg, σ_o= 0.25 $\mu C cm^{-2}$, σ_1= 0.1 $\mu C cm^{-2}$, $Q = 50 \cdot nC$, $\vec{r}_Q$= (0.5 m; 0.8 m; 0.0 m)



Esercizio 2

Un cilindro conduttore di raggio R_1=5 mm, lunghezza L= 2 m è coassiale con due gusci cilindrici di raggio R_2=50 mm e di raggio R_3=240 mm, anch'essi conduttori e di uguale lunghezza (vedi figura). Il cilindro piú interno é stato caricato con una carica Q_1 pari a Q=2.4 μC, l'intermedio con una carica Q_2 pari tre volte Q ($Q_2 = 3Q$) e l'esterno possiede una carica negativa pari a $Q_3 = -4Q$. I gusci hanno spessore trascurabile rispetto a R_1. Si calcolino:
a) le differenze di potenziale $V(R_1) - V(R_2)$ e $V(R_2) - V(R_3)$;
b) il modulo del campo elettrico in un punto P_1 a distanza d_1=190 mm dall'asse del sistema ed in un punto P_2 a distanza d_2=400 mm dallo stesso asse;
c) l'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema.
Questa configurazione iniziale viene poi modificata collegando un sottile filo conduttore tra il cilindro di raggio R_1 ed il guscio di raggio R_3. In questa nuova configurazione, si calcoli:
d) Il valore del modulo del campo elettrico nei punti P_1 e P_2;



Soluzioni I prova di esonero

(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)

Esercizio 1

a) $\mathbf{p} = \int_S \sigma\ \mathbf{r}\ dS$

$p_x = \int_o^R \int_0^{2\pi} (\sigma_o\ sin\phi + \sigma_1)(r\ cos\phi)\ r\ dr\ d\phi = 0$

$p_y = \int_o^R \int_0^{2\pi} (\sigma_o\ sin\phi + \sigma_1)(r\ sin\phi)\ r\ dr\ d\phi = \frac{\pi\sigma_o R^3}{3}$ =20.9 pC m

$q = \int_o^R \int_0^{2\pi} (\sigma_o\ sin\phi + \sigma_1) r\ dr\ d\phi = \int_o^R \int_0^{2\pi} \sigma_1\ r\ dr\ d\phi = \sigma_1 R^2\pi$=12.6 nC

b) La forza fra il dischetto e la carica Q è dovuta sia al dipolo $\mathbf{p}$ che alla carica q:

$\mathbf{f} = \mathbf{f_p} + \mathbf{f_q}$ dove $\mathbf{f_q} = q\ \mathbf{E}_Q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{qQ}{r_q^2}\hat{\mathbf{r}}_Q$

$\mathbf{f_p} = \vec{\nabla}\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_Q$

Pertanto si ha:

$f_x = -\frac{Qp}{4\pi\epsilon_o}\frac{3x_Q y_Q}{{r_Q}^5},\ \ f_y = -\frac{Qp}{4\pi\epsilon_o}\frac{3{y_Q}^2-{r_Q}^2}{{r_Q}^5},\ \ f_z = -\frac{Qp}{4\pi\epsilon_o}\frac{3z_Q y_Q}{{r_Q}^5} = 0$

Per il principio di azione e reazione, lo stesso risultato si ottiene considerando la forza $-\mathbf{f_p}$ che il dipolo esercita sulla carica Q. Questa é otteunuta oltiplicando per Q le formule che esprimono le componenti del campo elettrico di un dipolo disposto lungo l'asse y:

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_o}\frac{3x_Q y_Q}{{r_Q}^5}$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_o}\frac{3y_Q^2 - r_Q^2}{{r_Q}^5}$$

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_o}\frac{3z_Q y_Q}{{r_Q}^5} = 0.$$

Pertanto si ottiene:

$f_{p_x} + f_{q_x} = 3.4\ 10^{-6}$ N
$f_{p_y} + f_{q_y} = 5.4\ 10^{-6}$ N
$|\mathbf{f_p} + \mathbf{f_q}| = 6.4\ 10^{-6}$ N

c) Il momento che agisce sul dischetto è

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_Q = \frac{p\ Q sin\theta}{4\pi\epsilon_o r_Q^2}\hat{\mathbf{u}}_z$$

per cui

$|\mathbf{M}| = \frac{\mathbf{p\ Qx_Q}}{\mathbf{4\pi\epsilon_o r_Q^3}} = \mathbf{5.6\ 10^{-9}}$ N m

d) L'energia del dipolo nel campo della carica Q è data da $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_Q$, per cui la posizione di equilibrio stabile si ha quando $\mathbf{p}$ é parallelo a $\mathbf{E_q}$ ovvero opposto a $\mathbf{r}_Q$, mentre si ha equilibrio instabile per la direzione opposta.
Detto θ l'angolo fra $\mathbf{p}$ ed $\mathbf{E}_Q$, tale che $\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_Q = pE_Q \cos\theta$, si ha equilibrio stabile per $\theta = 0$ e instabile per $\theta = \pi$ (se si indica con ϕ l'angolo tra $\mathbf{p}$ e il vettore $\mathbf{r}_Q$ si ha $\phi = \pi - \theta$ e l'equilibrio è stabile per $\phi = \pi$)

e) L'equazione del moto è $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$, dove $\mathbf{L} = I\ \omega$ è il momento angolare del dischetto, I il suo momento di inerzia e ω la sua velocità angolare, diretta lungo l'asse z.

Si ha, quindi: $I\ \ddot{\theta} = -\frac{p\ Q}{4\pi\epsilon_0 r_Q^2}\ \theta$, che scritta nella forma $\ddot{\theta} + \omega_o^2\ \theta = 0$ implica una pulsazione delle piccole oscillazioni:

$\omega_o = \sqrt{\frac{p\ Q}{2\pi\epsilon_0 r_Q^2 m R^2}}$

e quindi una frequenza $\nu_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = 26$ Hz.

Esercizio 2

a) Applicando il teorema di Gauss si deduce che

$$\text{per } R_1 < r < R_2: \qquad E = \frac{Q}{2\pi\epsilon L r}$$
$$\text{per } R_2 < r < R_3: \qquad E = \frac{4Q}{2\pi\epsilon L r}$$

e quindi

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{2\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 50\ kV$$
$$V(R_2) - V(R_3) = \frac{4Q}{2\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) = 135\ kV$$

Inoltre sulla base dello stesso teorema di Gauss si deduce che

$$\text{per } R_3 < r: \qquad E = 0$$

Lo stesso risultato si ottiene calcolando l'energia l'integrale della densitá di energia elettrica in tutto lo spazio i cui contributi non nulli sono solo quelli relativi alle regioni di spazio comprese tra ciascuna delle due coppie di armature.

d) Il filo metallico che collega due dei tre conduttori cilindrici causa una ridistribuzione della carica $Q_1 + Q_3$ tra il cilindro centrale ed il guscio di raggio R_3,

$$Q_1' + Q_3' = Q_1 + Q_3 = -3Q$$

Il valore che assume la carica sul cilindro centrale e' necessariamente consistente con la presenza di differenza di potenziale nulla tra il cilindro centrale ed il guscio di raggio R_3:

$$0 = V'(R_1) - V'(R_3) = [V'(R_1) - V'(R_2)] + [V'(R_2) - V'(R_3)] = \frac{Q_1'}{2\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{Q_1' + 3Q}{2\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$

Questo ci consente di determinare Q_1' dai dati del problema

$$Q_1' = -3Q\frac{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} = -2.9\ \mu C \tag{1}$$

E poi, essendo a questo punto nota Q_1', si trova facilmente anche Q_3'

$$Q_3' = Q_1 + Q_3 - Q_1' = -3Q - Q_1' = -4.3\ \mu C$$

Per calcolare il campo elettrico in P_1 e P_2 , applichiamo di nuovo il teorema di Gauss trovando

$$E(P_1) = E = \frac{Q_1' + Q_2}{2\pi\epsilon L d_1} = 2.03 \cdot 10^5 V/m$$
$$E(P_2) = 0$$