Prima prova d'esonero del corso di Elettromagnetismo - a.a. 2012/13 - 12/4/2013

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

ESERCIZIO 1

Ad un sottile guscio sferico isolante di raggio $R = 10\ cm$ è stata rimossa una calotta individuata da un angolo di $\pi/4$ rispetto all'asse z (vedi figura). La parte restante è carica, per $0 < \theta < \pi/4$, con densità superficiale incognita σ_0 e, per $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$, con densità superficiale nota $\sigma_1 = 3.3 \cdot 10^{-9} C/m^2$.

Una carica puntiforme $Q = 3.5 \cdot 10^{-10} C$ è tenuta in equilibrio nel centro della sfera da una molla isolante e neutra, allungata di un tratto pari al raggio R rispetto alla condizione di riposo.

Si ricavi:

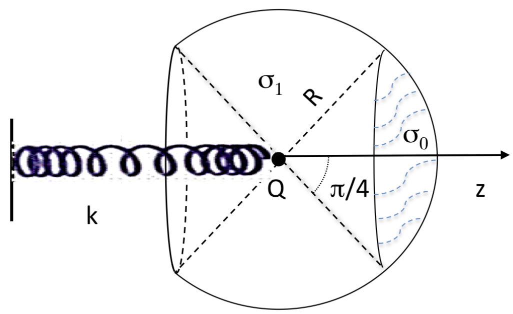
a) l'espressione della costante elastica k della molla in funzione di σ_0,

b) il valore di σ_0 (con il segno) per cui il termine di monopolo del potenziale totale del sistema (dovuto a σ_0, σ_1 e Q) è nullo.

Infine, con il sistema nelle condizioni descritte nel punto b)), si calcoli:

c) l'energia potenziale di un dipolo di momento $P' = 3.5 \cdot 10^{-11}\ C \cdot m$ collocato nel punto di coordinate $(0, 0, 5\ m)$, e orientato nella direzione positiva dell'asse z.

PS. Per semplicità di calcolo, si assuma il centro della sfera come origine del sistema di riferimento.



ESERCIZIO 2

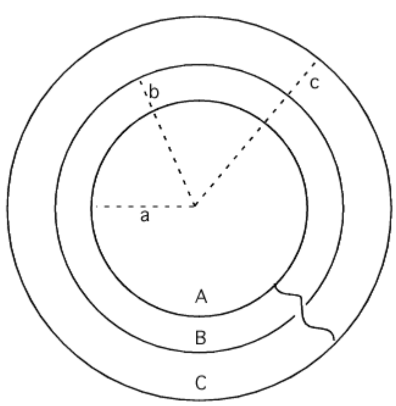
Un condensatore è costituito da tre sottili gusci sferici metallici concentrici A, B, C rispettivamente di raggi a, b, c con $a < b < c$ (vedi figura). Il guscio più interno è connesso con quello più esterno tramite un sottile filo metallico isolato che passa attraverso un piccolo foro praticato nel guscio intermedio. Una carica Q è depositata sul guscio intermedio mentre il sistema costituito dai conduttori connessi A e C ha carica totale nulla.

a) Si calcoli il rapporto fra le cariche ${Q^B}_i$ e ${Q^B}_e$ distribuite rispettivamente sulle superfici interna ed esterna del guscio intermedio.

b) Si ricavi l'espressione della densità di energia elettrostatica in funzione della distanza r dal centro del sistema e della carica Q, nello spazio compreso tra A e B e in quello tra B e C.

c) Si determini la condizione che devono verificare i raggi a, b e c affinché le pressioni elettrostatiche interna ed esterna al guscio intermedio siano uguali.

d) Si calcoli la carica accumulata sul conduttore A e quella sul conduttore C, indicando il rispettivo segno, assumendo $a = 12\ cm$, $b = 14\ cm$ e $c = 18\ cm$ e $Q = 2.0 \cdot 10^{-8}\ C$.



Soluzioni della prova scritta

Esercizio 1

a)

Per considerazioni di simmetria, il campo elettrostatico nel centro della sfera è diretto lungo l'asse z. La componente E_z vale:

$$E_z(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^{\pi/4} \sigma_0 \cdot 2\pi R^2 \sin\theta \cos(\pi-\theta)\ d\theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sigma_1 \cdot 2\pi R^2 \sin\theta \cos(\pi-\theta)\ d\theta$$

Il secondo integrale, come deducibile anche da considerazioni di simmetria, è nullo. Per cui

$$E_z(0) = -24\sigma_0\epsilon_0 sin^2(\pi/4) = -\frac{\sigma_0}{8\epsilon_0}$$

Di conseguenza, poichè la forza di richiamo della molla è diretta verso le z decrescenti, la carica è in equilibrio nell'origine se $E_z > 0$, ovvero se $\sigma_0 < 0$. L'espressione della costante elastica, che si ricava uguagliando i moduli delle due forze, è:

$$k = -Q\frac{\sigma_0}{8\epsilon_0 R}$$

b) Affiché il momento di monopolo sia nullo, l'intero sistema deve possedere carica totale nulla. Pertanto,

$$Q + \int_0^{\pi/4} \sigma_0 \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sigma_1 \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = 0$$

da cui si ottiene:

$$\sigma_0 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{Q}{2\pi R^2} + \sqrt{2}\ \sigma_1\right) = -3.5 \cdot 10^{-8} C/m^2$$

c)

Nelle condizioni del punto precedente, il campo elettrostatico del sistema, a distanza grande rispetto al raggio della sfera, può essere approssimato con il campo di un dipolo elettrico di momento pari al momento di dipolo dell'intero sistema di cariche. Per considerazioni di simmetria, tale dipolo è orientato parallelamente all'asse z. Per calcolare il momento di dipolo totale, assumiamo come origine del sistema di riferimento il centro della sfera dove è posta la carica Q. Per quanto detto sopra l'unica componente del dipolo diversa da zero è p_z:

$$p_z = \int_0^{\pi/4} R\cos\theta \cdot \sigma_0 \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} R\cos\theta \cdot \sigma_1 \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

Il secondo integrale di questa espressione è nullo e dal primo si ottiene:

$$p_z = 2\pi\sigma_0 R^3 \cdot \frac{1}{2}\sin^2(\pi/4) = \frac{\sigma_0 \pi R^3}{2} = -5.5 \cdot 10^{-11} C \cdot m$$

In approssimazione di dipolo, il campo sull'asse z, a distanza $l = 5\ m$ dal centro della sfera, è espresso dalla relazione:

$$\vec{E} = \frac{p_z}{2\pi\epsilon_0 l^3}\hat{z}$$

Il dipolo $\vec{p'} = p'\hat{z}$ possiede dunque l'energia potenziale

$$U = -\vec{p'} \cdot \vec{E} = -p' \cdot \frac{p_z}{2\pi\epsilon_0 l^3} = -\frac{p'}{2\pi\epsilon_0 l^3} \cdot \frac{\sigma_0 \pi R^3}{2} = -\frac{\sigma_0 R^3 p'}{4\epsilon_0 l^3} = +2.8 \cdot 10^{-13} J$$

Esercizio 2

a)
Indichiamo con Q_A, Q e Q_C le cariche *totali* presenti rispettivamente sui gusci A, B e C. I gusci A e C, elettricamente connessi, costituiscono un sistema complessivamenta neutro, per cui: $Q_A + Q_C = 0$, cioè:

$$Q_C = -Q_A$$

. Tale condizione continua a valere, per la *conservazione della carica*, anche quando il guscio B viene caricato e le cariche su A e C si modificano a causa dell'induzione.
In conseguenza della *induzione completa*, la carica Q_i^B distribuita sulla superficie interna di B risulta:

$$Q_i^B = -Q_A,$$

per cui la carica Q_e^B distribuita sulla superficie esterna di B risulta:

$$Q_e^B = Q - Q_i^B = Q + Q_A.$$

Si noti inoltre che

$$Q_C = Q_e^C + Q_i^C = -Q_A$$

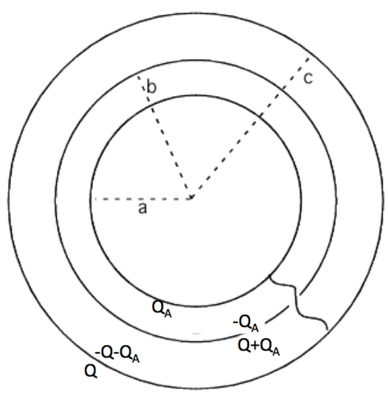
essendo Q_i^C e Q_e^C le cariche sulle superfici interne ed esterna del guscio C. Inoltre a causa dell'induzione completa tra i gusci B e C si ha

$$Q_i^C = -Q_e^B = -Q - Q_A$$

da cui segue che

$$Q_e^C = Q$$

La situazione quindi riassunta in figura



Poiche' B e C sono elettricamente connessi, per i potenziali V_A, V_B e V_C dei tre gusci si ha:
$V_A = V_C$ e $V_A - V_B = V_C - V_B$, che si traduce in:

$$\int_a^b \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_o r^2} dr = \int_b^c \frac{Q_A + Q}{4\pi\epsilon_o r^2} dr,$$

dove le funzioni integrande rappresentano il modulo del campo elettrico nelle regioni$a < r < b$ e $b < r < c$ nelle quali, per il teorema di Gauss, esso è determinato dalle cariche interne rispettivamente Q_A e $(Q_A + Q)$. Pertanto si ricava:

$$Q_A = Q\frac{a(c-b)}{b(a-c)}, \quad Q_i^B = \frac{a(c-b)}{b(c-a)}, \quad Q_e^B = \frac{c(b-a)}{b(c-a)},$$

e il rapporto:

$$\eta \equiv \frac{Q_i^B}{Q_e^B} = \frac{a(c-b)}{c(b-a)}.$$

b)
La densità di energia elettrostatica nelle due intercapedini dipende dal quadrato dei campi elettrici in quelle due zone:

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_o E^2,$$

che nelle due intercapedini diventa rispettivamente:

$$u_{AB} = \frac{1}{32\pi\epsilon_o}\frac{Q_A^2}{r^4} = \frac{1}{32\pi\epsilon_o}\frac{Q^2}{r^4}\left[\frac{\eta}{1+\eta}\right]^2 = \frac{1}{32\pi\epsilon_o}\frac{Q^2}{r^4}\left[\frac{a(c-b)}{b(c-a)}\right]^2,$$

$$u_{BC} = \frac{1}{32\pi\epsilon_o}\frac{(Q_A+Q)^2}{r^4} = \frac{1}{32\pi\epsilon_o}\frac{Q^2}{r^4}\left[\frac{1}{1+\eta}\right]^2 = \frac{1}{32\pi\epsilon_o}\frac{Q^2}{r^4}\left[\frac{c(b-a)}{b(c-a)}\right]^2,$$

dove si è tenuto conto che risulta:

$$Q_A = -\frac{\eta}{1+\eta}Q, \qquad Q_A + Q = \frac{1}{1+\eta}Q.$$

c)
La pressione elettrostatica è uguale alla densità di energia elettrostatica:

$$p = u = \frac{1}{2}\epsilon_o E^2$$

Pertanto l'eguaglianza delle pressioni elettrostatiche interna ed esterna sul guscio intermedio implica l'eguaglianza dei campi in prossimità del guscio:

$$|\vec{E}_{AB}(r=b)| = |\vec{E}_{BC}(r=b)|$$

e quindi delle cariche $Q_i^B = Q_e^B$, cioè:

$$\eta = 1, \quad \Longrightarrow \quad \frac{b}{a} + \frac{b}{c} = 2$$

d)
Introducendo i valori numerici dati per a, b, c e Q otteniamo una situazione, diversa da quella del punto c), per la quale invece di $\eta = 1$, si ha:

$$\eta \equiv \frac{Q_i^B}{Q_e^B} = \frac{a(c-b)}{c(b-a)} = \frac{4}{3} = 1.33$$

da cui deriva:

$$Q_A = -\frac{8}{7}\cdot 2\cdot 10^{-8}\ C = -1.14\cdot 10^{-8}\ C \qquad\qquad Q_C = -Q_A = 1.14\cdot 10^{-8}\ C.$$

Soluzione alternativa alla domanda a)

Le tre superfici sferiche si possono considerare come le armature di tre condensatori sferici (vedi figura). Il condensatore C_{BA} tra le superfici B e A, il condensatore C_{BC}, tra le superfici B e C, ed un terzo condensatore C_C tra la superficie C ed infinito. Le loro capacità sono:

$$C_{BA} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \qquad C_{BC} = 4\pi\epsilon_0 \frac{bc}{c-b} \qquad C_C = 4\pi\epsilon_0 c$$

La carica Q depositata su B induce una carica complessiva $-Q$ sulle armature A e C. Poiché la carica iniziale sulle superfici di raggi a e c è nulla, sull'armatura del condensatore C_C deve esser presente anche una carica Q che neutralizza la carica $-Q$ indotta su A e C.
Ne segue:

$$\Delta V_{BA} = \Delta V_{BC} \qquad \frac{Q_i^B}{C_{BA}} = \frac{Q_e^B}{C_{BC}} \qquad \frac{Q_i^B}{Q_e^B} = \frac{C_{BA}}{C_{BC}} = \frac{a(c-b)}{c(b-a)}$$

e dovendo essere $Q_i^B + Q_e^B = Q$, si trova anche:

$$Q_e^B = Q\frac{C_{BC}}{C_{BC} + C_{BA}} \qquad\qquad Q_i^B = Q\frac{C_{BA}}{C_{BC} + C_{BA}}$$