Fisica Nucleare e Subnucleare III

Le violazioni di scaling e la QCD

1

mercoledì 11 novembre 2009

Variazione di $\alpha_{\rm s}$ con Q^2

Come la QED, la costante di accoppiamento della QCD deve essere rinormalizzata, e in conseguenza, varia con Q^2 (*running* di α_s , di un fattore circa 3 tra 2 e 200 GeV). Al LO:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}$$
 con $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_f$

Per la natura non abeliana di SU(3) di colore, i gluoni, a differenza dei fotoni, possono interagire tra loro. In conseguenza di questo, mentre a bassi Q² la teoria non è perturbativa (schiavitù infrarossa), i quark sono asintoticamente liberi per alti valori dell'impulso trasferito (modello a partoni, *scaling*), Oltre il tree level ci si aspettanto però variazioni dell'invarianza di scala, o *scaling violations*.



per scattering elastico, $M = W \Rightarrow Q^2 = 2Mv \Rightarrow x = 1$

Diffusione anelastica e-p (Dionisi, BJ 12.5)

Nello scattering anelastico, al posto dei fattori di forma, intervengono due funzioni di struttura:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[W_2(Q^2, \upsilon) \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + 2W_1(Q^2, \upsilon) \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right]$$

Se si fa l'ipotesi che il protone sia costituito da partoni privi di struttura di spin 1/2, i quark, lo scattering dell'elettrone con i quark deve essere elastico, come lo scattering e_{μ} , e la sez. d'urto avrà la forma:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\frac{Q^2}{2m^2}\right]\delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right)$$

$$2W_1(Q^2;\upsilon) = \frac{Q^2}{2m^2} \delta\left(\upsilon - \frac{Q^2}{2m}\right)$$

$$W_2 = \delta\left(\upsilon - \frac{Q^2}{2m}\right)$$

$$W_2(Q^2;\upsilon) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\upsilon}\right)$$

$$w_2(Q^2;\upsilon) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\upsilon}\right)$$
per scattering elastico su partone le funzioni di struttura dipendono solo da $\frac{Q^2}{2m\upsilon}$

funzioni di struttura nel modello a partoni

Come si ricombinano gli scattering elastici sui partoni nello scattering anelastico sul nucleone?

Dobbiamo sommare tutti i contributi elastici, assumendo che ogni partone prenda una frazione z dell'impulso del nucleone.

Ma cosa diventano le funzioni di struttura? Cosa ci mettiamo al posto della massa?

Possiamo calcolarlo nel riferimento di Breit, o riferimento di "momento infinito" in cui possiamo trascurare le masse: Per ogni singolo partone i la massa iniziale e finale dovranno entrambe essere praticamente nulle:

$$0 = (zp)^{2} = (zp+q)^{2} = q^{2} + 2zp \cdot q = -Q^{2} + 2zp \cdot q = 0 \quad \text{ossia} \ z = \frac{Q^{2}}{2p \cdot q} = x$$

o in altri termini: $v = \frac{p \cdot q}{M} = \frac{zp \cdot q}{m_{i}} \Rightarrow m_{i} = zM$
per cui
$$2W_{1i}(Q^{2}, v) = \frac{Q^{2}}{2x_{i}^{2}M^{2}} \delta\left(v - \frac{Q^{2}}{2x_{i}M}\right) \qquad W_{2i}(Q^{2}, v) = \delta\left(v - \frac{Q^{2}}{2x_{i}M}\right)$$

lo scaling di Bjorken

la diffusione anelastica sul nucleone diventa una somma incoerente di diffusioni elastiche sui singoli partoni. Nello scattering anelastico di elettrone su nucleone, p. es., la somma su tutti i partoni diventa:

$$MW_1(Q^2; \upsilon) = \sum_i \frac{e_i^2}{2} f_i(x) \equiv F_1(x)$$

$$\upsilon W_2(Q^2;\upsilon) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \equiv F_2(x)$$

Le funzioni di struttura dipendono da una sola variabile, la *x* di Bjorken, che rappresenta la frazione di impulso del nucleone trasportata dal singolo partone.

Confrontando $F_1 e F_2$ si ottiene la relazione di Callan-Gross:

$$2xF_1(x) = F_2(x)$$

6

Callan-Gross

La relazione di CG è sperimentalmente ben verificata a basso Q^2 . Ma sappiamo che la sua validità è legata allo scattering di fotoni su fermioni (s=1/2). Infatti, se consideriamo fotoni virtuali, oltre alle polarizzazioni trasversali, avremo anche uno stato longitudinale (m=0). Le due componenti della sezione d'urto devono essere:

ma l'assorbimento di fotoni con m=0 di grande energia è impossibile per un fermione, per la conservazione dell'elicità e del momento angolare (si può vedere mettendosi nel rif. di Breit, purché siano trascurabili i momenti trasversi dei partoni)

scattering di elettrone su p e n

$$F_{2}^{ep}(x) = \frac{4}{9} x u^{p}(x) + \frac{1}{9} x d^{p}(x) + \frac{4}{9} x \overline{u}^{p}(x) + \frac{1}{9} x \overline{d}^{p}(x)$$
$$F_{2}^{en}(x) = \frac{4}{9} x u^{n}(x) + \frac{1}{9} x d^{n}(x) + \frac{4}{9} x \overline{u}^{n}(x) + \frac{1}{9} x \overline{d}^{n}(x)$$

per isospin: $u(x) \equiv u^{p}(x) = d^{n}(x) \qquad \overline{u}(x) \equiv \overline{u}^{p}(x) = \overline{d}^{n}(x)$ $d(x) \equiv d^{p}(x) = u^{n}(x) \qquad \overline{d}(x) \equiv \overline{d}^{p}(x) = \overline{u}^{n}(x)$

$$F_{2}^{cp}(x) = \frac{4}{9}xu(x) + \frac{1}{9}xd(x) + \frac{4}{9}x\overline{u}(x) + \frac{1}{9}x\overline{d}(x)$$

$$F_{2}^{cn}(x) = \frac{4}{9}xd(x) + \frac{1}{9}xu(x) + \frac{4}{9}x\overline{d}(x) + \frac{1}{9}x\overline{u}(x)$$

distribuzioni di *u* e *d*

Confrontando le funzioni di struttura su protone e neutrone si può estrarre la distribuzione dell'u e del d:

$$\int_{0}^{1} F_{2}^{ep} dx = \frac{4}{9} f_{u} + \frac{1}{9} f_{d} \approx 0.18$$

$$\int_{0}^{1} F_{2}^{en} dx = \frac{4}{9} f_{d} + \frac{1}{9} f_{u} \approx 0.12$$
 \Rightarrow $f_{u} \approx 0.36$
 $f_{d} \approx 0.18$

Solo il 50% del momento del protone è trasportato dai quark Sottraendo le funzioni di struttura di p e n, si trova la distribuzione dei quark di valenza:

$$F_{2}^{ep} - F_{2}^{en} = x \left[\frac{1}{3} u_{\rm V} - \frac{1}{3} d_{\rm V} \right]$$

Dallo scattering di elettroni, non si possono però estrarre informazioni sugli antiquark. Questa informazione si ricava dai neutrini, le cui interazioni deboli distinguono tra quark e antiquark. La differenza è rappresentata da una F_3 , che cambia segno tra neutrino ed antineutrino

differenza tra quark e antiquark (Dionisi cap. 6)



10

l'espressione della sez. d'urto per neutrini

Per la struttura V-A dell'interazione dei neutrini, la sez. d'urto più generale che si ottiene da Lorentz e CP è:

$$\frac{d^2\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{d\nu dQ^2} = \frac{G^2}{2\pi} \left(\frac{M_W^2}{Q^2 + M_W^2} \right) \frac{E_{\mu}}{E_{\nu}} \left(2W_1^{\nu,\bar{\nu}} \left(Q^2, \nu\right) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + W_2^{\nu,\bar{\nu}} \left(Q^2, \nu\right) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \pm \frac{E_{\nu} + E_{\mu}}{M} W_3^{\nu,\bar{\nu}} \left(Q^2, \nu\right) \right)$$
(si confronti con
$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[W_2 \left(Q^2, \nu\right) \cos^2 \left(\frac{\vartheta}{2}\right) + 2W_1 \left(Q^2, \nu\right) \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right]$$

Ponendo a 1 il propagatore, trascurando termini di ordine M/E_y e introducendo come al solito *x* ed *y* si ottiene:

$$\frac{d^2 \sigma^{\nu,\nu}}{dx dQ^2} = \frac{G^2 s}{2\pi} \left(\frac{1}{2} F_2^{\nu,\bar{\nu}} (x,Q^2) (1 + (1-y)^2) \pm \frac{x}{2} F_3^{\nu,\bar{\nu}} (x,Q^2) (1 - (1-y)^2) \right)$$

L'assorbimento di bosoni polarizzati longitudinalmente (uguale a zero nel modello a partoni di spin 1/2) è:

$$\sigma_L^{\nu,\bar{\nu}} \propto F_L^{\nu,\bar{\nu}} = \left(1 + \frac{Q^2}{\nu^2}\right) F_2 - 2xF_1 \approx F_2 - 2xF_1 \quad \text{per } Q^2, \nu \to \infty \quad \text{con } x \text{ finito}$$

Interpretazione delle F nel modello a partoni

 $\frac{d^2 \sigma^{v,\bar{v}}}{dx dQ^2} = \frac{G^2 s}{2\pi} \left(\frac{1}{2} F_2 \left(x, Q^2 \right) \left(1 + \left(1 - y \right)^2 \right) \pm \frac{x}{2} F_3 \left(x, Q^2 \right) \left(1 - \left(1 - y \right)^2 \right) \right)$

Confrontando gli andamenti in *y* aspettati per i partoni, considerando una targetta isoscalare $F_i^N = \frac{1}{2}(F_i^p + F_i^n)$ e considerando tutti i quark, inclusi *c* ed *s*, possiamo identificare:

$$F_2^N = x(q + \overline{q})$$
 $xF_3^N = x(q - \overline{q})$ (quark di valenza)

Per cui ci aspettiamo la regola di somma di Gross-Llewellin Smith:

$$\int_{0}^{1} F_{3}^{\nu N}(x) dx = \int_{0}^{1} [u_{V}(x) + d_{V}(x)] dx = 3$$

sperimentalmente verificata.

Inoltre, dalle sez. d'urto totali abbiamo:

$$\sigma^{\nu N} = \frac{G_F^2 s}{2\pi} \left[f_q + \frac{1}{3} f_{\overline{q}} \right] \qquad \sigma^{\overline{\nu} N} = \frac{G_F^2 s}{2\pi} \left[\frac{1}{3} f_q + f_{\overline{q}} \right]$$

dalle sez. d'urto misurate si può ricavare che

$$f_q \approx 0.41$$
 $f_{\overline{q}} \approx 0.08$ \Longrightarrow $f_g \approx 0.50$

interpretazione del modello a partoni

Nel modello a partoni, la sezione d'urto per un partone con frazione di momento longitudinale pari a z sarà:

$$\sigma \propto \int \frac{dz}{z} q(z) \sigma_{\text{parton}}(zp+q)$$

D'altra parte, per assicurare che la massa invariante del partone iniziale e finale siano uguali (scattering elastico), dato Q^2 dovrà essere selezionato proprio un partone con momento z=x:

per cui
$$\sigma_{\text{parton}}(zp+q) \propto \delta\left(1-\frac{x}{z}\right)$$

e in conseguenza possiamo concludere che la sezione d'urto è proporzionale alla distribuzione dei partoni:

$$\sigma \sim q(x)$$

Il modello a partoni in QCD

Se andiamo oltre il tree level, la x del partone con cui avviene l'interazione sarà una frazione dell'impulso iniziale z.



Se indichiamo con P la probabilità che un partone di momento z emetta un partone di momento x, e teniamo conto che in QCD le correzioni dipendenti da Q^2 , essendo la teoria rinormalizzabile, saranno logaritmiche, la espressione del modello a partoni:

$$\sigma \propto \int \frac{dz}{z} q(z) \sigma_{\text{parton}}(zp+q) \propto q(x)$$

diventa

diventa
$$\sigma(x,Q^2) \propto \int_x^1 \frac{dz}{z} q(z) \left[\delta \left(1 - \frac{x}{z} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{\mu} \right) P\left(\frac{x}{z} \right) \right] \propto q(x,Q^2)$$

da cui $\frac{dq(x,Q^2)}{d\ln(Q^2/\mu)} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q(z,Q^2) P\left(\frac{x}{z} \right)$

al crescere di Q^2 , le distribuzioni dei partoni si spostano verso x più piccoli





Le equazioni DGLAP

Separando nell'equazione precedente quark e gluoni,

$$\frac{dq,g(x,Q^2)}{d\ln(Q^2/\mu)} = \frac{dj(x,Q^2)}{d\ln(Q^2/\mu)} = \sum_i \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} i(z,Q^2) P_{ij}\left(\frac{x}{z}\right) \quad \text{dove } i,j \text{ sono } q,g$$

le equazioni per i vari partoni possono essere scritte in forma compatta come:

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} \left(\begin{array}{c} q \\ g \end{array} \right) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[\begin{array}{c} P_{qq} & P_{qg} \\ P_{gq} & P_{gg} \end{array} \right] \otimes \left(\begin{array}{c} q \\ g \end{array} \right)$$

In questa forma, le equazioni di evoluzione sono dette di Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) Le *splitting functions P* sono state calcolate da A-P all'ordine leading. Agli ordini superiori, per $Q^2 >> k_t^2$

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ij}(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ij}^{(1)}(x) + \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2 P_{ij}^{(2)}(x) + \dots$$

Oltre la LLA

Se si vogliono includere gli ordini oltre i logaritmi dominanti, bisogna calcolare le funzioni *P* a due loop, e applicare le correzioni ad α_s . Anche in questo caso, non c'è una d<u>efin</u>izione univoca dello schema di rinormalizzazione per α_s (di solito MS) e di fattorizzazione per le funzioni di struttura. La fattorizzazione proposta da Altarelli è di mantenere la stessa definizione di *F*₂ in termini di partoni:

$$F_2 = x \left[q(x,Q^2) + \overline{q}(x,Q^2) \right]$$

 $F_1 \in F_3$ acquistano delle correzioni già LO, per cui, per esempio, si ha:

Callan-Gross: $F_L(x,Q^2) = F_2(x,Q^2) - 2xF_1(x,Q^2) \propto \alpha_s \neq 0$

(la differenza tra F_2 e $2xF_1$ è associata all'assorbimento di un bosone longitudinale, vietato per particelle massless di spin 1/2 prive di momento trasversale, garantito dall'emissione di gluoni) Gross-Llewellin Smith: $\int_{0}^{1} F_3 dx = \left(1 - \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \sum_{f} v_f$

QCD a piccolo *x*

Lo schema di evoluzione DGLAP non è il solo possibile:



interesse per le funzioni di struttura

L'evoluzione delle funzioni di struttura (PDF), oltre a costituire un test della QCD (imbarazzantemente positivo!), permette di determinare il running di α_s

In alcuni casi, come nella funzione di struttura longitudinale, o nell'espressione della Gross-Llewellin Smith, la dipendenza da α_s è diretta, e permette la sua determinazione. Purtroppo i dati non sono particolarmente precisi.

Un ulteriore campo di interesse nella conoscenza dell'evoluzione delle funzioni di struttura è la loro estrapolazione in range non ancora esplorati, come nel calcolo delle sezioni d'urto per i futuri collider adronici.

esperimenti

- Storicamente, le funzioni di struttura sono nate con lo scattering e-p, (F_2 , valenza),
- Poi sono state a lungo dominio degli esperimenti di neutrino, che rendono accessibile F_3 , e quindi la distribuzione dei quark del mare, dalla cui evoluzione si può ricavare la distribuzione dei gluoni. Dalle funzioni di struttura da neutrini è stato possibile estrarre per la prima volta una descrizione completa dei partoni nei nucleoni, che attraverso l'evoluzione prevista dalla QCD ha reso possibili parametrizzazioni delle PDF estrapolabili a più alti Q^{2} .
- Infine sono tornate alle interazioni e-p con HERA (F_2 , alto Q^2 , piccolo x)



Un successo delle predizioni delle PDF di neutrino



Table 1: HERA machine parameters.			
parameter	electron ring		proton ring
circumference (m)		6336	
beam energies, design (GeV)	30		820
beam energies, achieved (GeV)	27.6		920
e p c.m. energy squared (GeV^2)		10^{5}	
magn. bending field (T)	0.15		5.25
dipole bend. radius (m)	610		584
max. circ. curr., design (mA)	60		160
max. circ. curr., achiev.(mA)	50		110
n. bunch buckets	220		220
n. bunches (typical)	180		180
time betw. cross. (ns)		96	
max. lumi. design /achiev. $10^{31} cm^{-2} s^{-1}$		1.5/2.0	
max. yearly lumi. deliv. per expt. (pb^{-1})		70	
electron polarization	50 - 70%		



HERA

la cinematica di HERA

$$s = (p+k)^{2} = p^{2} + k^{2} + 2p \cdot k \cong 2p \cdot k = 2E_{e}E_{p} + 2E_{e}E_{p} = 4E_{e}E_{p} \approx (300 \text{ GeV})^{2}$$

dalle sole misure dell'elettrone finale si ha:

$$Q^{2} = (k - k')^{2} = 2E_{e}E'_{e}(1 + \cos\vartheta_{e})$$

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k} = \frac{p \cdot (k - k')}{p \cdot k} = 1 - \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} = 1 - \frac{E_{p}E'_{e} - E_{p}E'_{e}\cos\vartheta_{e}}{2E_{e}E_{p}} = 1 - \frac{E'_{e}}{2E_{e}}(1 - \cos\vartheta_{e})$$

$$x = \frac{Q^{2}}{2p \cdot q} = \frac{Q^{2}}{2yp \cdot k} \approx \frac{Q^{2}}{ys}$$
se $E_{e} = E'_{e}$ si ha inoltre $Q^{2} = 2E_{e}^{2}(1 + \cos\vartheta_{e}), y = \frac{E_{e}(1 + \cos\vartheta_{e})}{2E_{e}}$

$$\Rightarrow \frac{Q^{2}}{y} = 4E_{e}, x = \frac{4E_{e}}{s} = \text{costante}$$

24

ricostruzione dai soli adroni

La cinematica si può determinare anche usando le sole informazioni del sistema adronico (metodo di Jacquet-Blondel):

$$y = \frac{p \cdot (p'-p)}{p \cdot k} = \frac{E_p E_h - E_p E_h \cos \vartheta_h - M^2}{2E_p E_e} \cong \frac{E_h (1 - \cos \vartheta_h)}{2E_e} = \frac{\sum_{had} E_i (1 - \cos \vartheta_i)}{2E_e}$$
$$Q^2 (1-y) = 2E_e E'_e (1 + \cos \vartheta_e) \frac{E'_e}{2E_e} (1 - \cos \vartheta_e) = E'^2_e (1 - \cos^2 \vartheta_e) = E'^2_e \sin^2 \vartheta_e = E_h^2 \sin^2 \vartheta_h$$
$$Q^2 = \frac{\sum_{had} E_i^2 \sin^2 \vartheta_i}{(1-y)}$$

essenziale per le CC, ma anche nelle regioni in cui è difficile misurare gli elettroni

la cinematica di HERA



cinematica e rivelatori





un evento di H1



potenzialità di HERA

Gli esperimenti a targhetta fissa sono limitati a x> 0.01 per $Q^2 > 10$ GeV². Però fissano la valenza, e quindi gluone e mare per x> 0.01 HERA sonda sia gli alti Q^2 , sia i piccoli x. Questa regione è importante per DGLAP vs BKFL. A HERA, gli effetti di violazione di parità sono visibili attraverso le correnti deboli, permettendo in linea di principio di determinare anche F₃, soprattutto attraverso le CC (nelle NC il contributo di F3 è di pochi per cento per Q² \sim 1000 GeV²) Tuttavia le CC hanno il neutrino nello stato finale, rendendo più difficile la determinazione delle variabili cinematiche.



aspettative pre-HERA

- La crescita delle densità partoniche a basso x è predetta sia da DGLAP che da BKFL
- La predizione di BKFL è però precisa $(1/x^{\lambda})$
- Potevano anche essere immaginati effetti legati alla ricombinazione di partoni in seguito ad una densità elevata di partoni (saturazione), nel qual caso, né DGLAP né BKFL funzionerebbero.









interpretazione dei risultati

- L'esigenza di BKFL non è dimostrata (recenti calcoli dimostrano che le differenze non sono così evidenti come ci si aspettava)
- NLO DGLAP interpreta perfettamente tutti i dati con Q² > 1 GeV² e anche sotto, dove effetti non perturbativi sono comunque attesi
- scarse indicazioni di saturazione





Determination of parton distributions

Parametrise x dep. at low pQCD scale Q_0^2

$$\rightarrow f_i(x, Q_0^2)$$

Evolve up in Q² using DGLAP eqs.

$$\rightarrow f_i(x, Q^2 > Q_0^2)$$

Global fit to HERA + all related data

 $\rightarrow f_i$'s







il running di $\alpha_{_{\! S}}$

La variazione a tutti gli ordini di α_s è governata dall'equazione del gruppo di rinormalizzazione:

$$\frac{d\alpha_s}{d(\ln Q^2)} = -\frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_s^2 - \frac{\beta_1}{16\pi}\alpha_s^3 - O(\alpha_s^4) - \dots \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_f, \beta_1 = 102 - \frac{38}{3}N_f, \dots$$

la cui soluzione dipende da una costante di integrazione, che è espressa solitamente in termini di λ :

$$a_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(Q^2/\lambda^2)} \left[1 - \frac{2\beta_1 \ln(\ln(Q^2/\lambda^2))}{\beta_0^2 \ln(Q^2/\lambda^2)} + O\left(\frac{1}{\ln^2(Q^2/\lambda^2)}\right) \right] \dots \right]$$

Dalle funzioni di struttura in funzione di Q^2 , si può convenientemente estrarre il valore di λ , nell'ambito di uno schema di rinormalizzazione e dell'ordine dei calcoli Conoscendo λ , le misure di α_s a diversi Q^2 possono essere poi confrontate tra loro.



risultati per α_s

