il percorso verso il modello standard

(BJ cap. 13.4-13.5, Okun cap. 19.1,19.3)

trasformazioni globali di fase U(1)

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\Lambda}\psi(x)$$

l'invarianza della Lagrangiana di Dirac per U(1)
conduce alla corrente conservata $j^{\mu} = \overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$$

se si include la carica nella trasformazione di fase

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\Lambda}\psi \qquad\qquad j^{\mu} = q\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

si deduce la conservazione della carica
(per qualunque carica: elettrica, leptonica, barionica ecc.)

Invarianza di gauge locale

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\Lambda(x)}\psi(x)$$

per rendere invariante la Lagrangiana di Dirac
è necessario introdurre la derivata covariante

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x)$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x)$$

In questo modo si introduce nella Lagrangiana un termine di accoppiamento tra fermione e un campo vettoriale

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Dirac} - j^\mu A_\mu$$

ossia un campo di gauge di massa nulla (altrimenti comparirebbe un termine di massa non invariante) interpretabile come il fotone.
Notiamo che se aggiungiamo un termine cinetico

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Dirac} - j^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} \qquad \left(F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)$$

il percorso verso il modello standard
(Okun 19.2, MS 12.2)

per estendere il meccanismo alle correnti deboli, dobbiamo considerare che queste trasformano le particelle come doppietti di SU(2), isospin debole. (originariamente motivato per l'isospin forte) trasformazioni globali di fase SU(2):

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad \psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}}\psi(x)$$

$\vec{\alpha}$ sono tre coefficienti reali e

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Yang e Mill SU(2)

BJ 13.6.5, Ok 19.5, MS 12.3

La trasformazione infinitesima di gauge deve essere:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = [1 - ig\vec{\Lambda}(x)\cdot\vec{\tau}]\psi(x)$$

dove le τ sono le matrici di rotazione isotopica. Nella derivata covariante $\vec{\tau}\cdot\vec{W}$, con ***W*** tripletto di isospin.

teoria non abeliana: i generatori di SU(2) non commutano.
Il tensore del campo diventa: $W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig\left[W_\mu W_\nu - W_\nu W_\mu\right]$

La non commutatività fa comparire l'autoaccoppiamento dei bosoni vettoriali.
Di nuovo, introducendo un termine di massa dei bosoni, la invarianza di gauge si perderebbe

rottura spontanea di una simmetria discreta

(BJ 13.6.8, Ok 20.1)

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \qquad V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

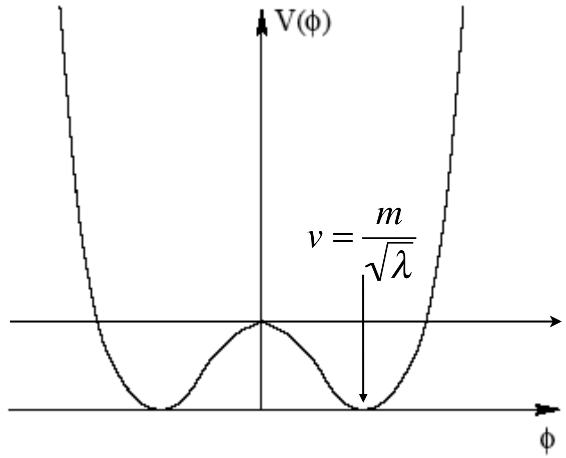
potenziale parabolico: non c'è campo nel vuoto
la massa quantifica l'oscillazione intorno al vuoto.
La lagrangiana è simmetrica per $\varphi \to -\varphi$

Se cambiamo il segno di m^2 abbiamo un vuoto instabile.
Se però aggiungiamo al potenziale un termine quartico positivo:

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$$

la lagrangiana diventa:

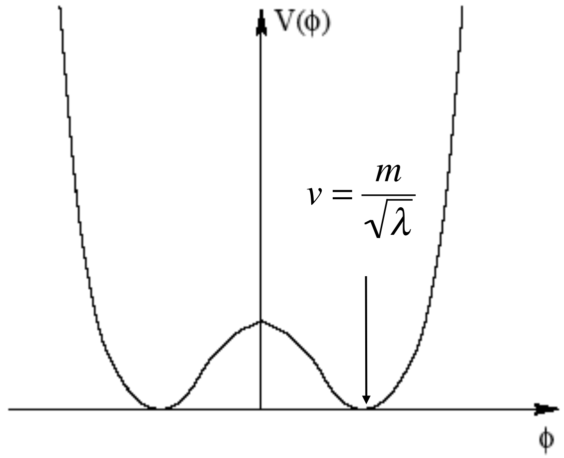
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$$



lo stato ϕ=0 rimane instabile, ma
compaiono due minimi a $\phi = \pm v = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$

Spostiamo V(ϕ) ponendo il minimo a 0 $\quad V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - v^2\right)^2$

lo stato di vuoto (il minimo dell'energia) non coincide con il centro di simmetria del sistema



ora se si sviluppano i calcoli perturbativi intorno a ϕ=0, che è instabile, i calcoli divergono.

per ottenere calcoli perturbativi convergenti, bisogna traslare ϕ intorno ad uno dei due minimi: $\phi(x) = \chi(x)+v$

la lagrangiana non è più simmetrica in χ (rispetto al vuoto) e diventa:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_\mu}\right)^2 - \lambda v^2\chi^2 - \lambda v\chi^3 - \frac{1}{4}\lambda\chi^4$$

Naturalmente le due lagrangiane devono dare gli stessi risultati esatti, ma solo una può essere sviluppata perturbativamente.
Nella lagrangiana compare inoltre un termine di massa per il campo χ che non era presente nella lagrangiana originale, $M_\chi = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{2}m$
oltre a termini di autointerazione tripla e quadrupla del campo

rottura spontanea di una simmetria continua

se si ripete la procedura precedente per una simmetria continua, $V(\phi_1,\phi_2)$, per esempio un campo complesso $\phi \propto \phi_1 + i\phi_2$ intorno al nuovo minimo sono possibili due modi, χ_1 e χ_2, uno radiale, massivo, uno tangenziale, lungo la circonferenza di minimo, privo di resistenza (privo di massa)

esempio del teorema di Goldstone, che afferma che la rottura spontanea di una simmetria continua genera uno o più campi scalari a massa nulla

rottura spontanea di U(1)

Se richiediamo che la lagrangiana precedente sia anche invariante sotto U(1), dovremmo introdurre come al solito un campo vettoriale A nella derivata covariante.

Il risultato è che ci ritroviamo con un campo scalare a massa nulla (Goldstone), un campo scalare massivo, ma anche il campo vettoriale A acquista una massa.
Ora però abbiamo un grado di libertà di troppo
(il campo vettoriale massivo ha tre componenti)

il meccanismo di Higgs

possiamo però parametrizzare il campo ϕ complesso di partenza direttamente in un modulo H e una fase θ.

$$\phi(x) \propto (v + H) e^{i\frac{\vartheta(x)}{v}}$$

$$\phi'(x) = e^{iq\lambda(x)}\phi(x)$$

$$\frac{\vartheta(x)}{v} = -q\lambda \rightarrow \vartheta'(x) = 0$$

In questo modo è possibile trovare una gauge (scegliere un Λ) in cui θ' è nullo.
Il campo di Goldstone è gauge-ato via.
Infatti con questa parametrizzazione, θ non compare più nella lagrangiana, nella quale rimangono due particelle massive, un vettore A e uno scalare H, ripristinando il corretto conteggio dei gradi di libertà.
Questo è il meccanismo di Higgs nel caso Abeliano, col bosone di Goldstone che è stato “mangiato” dal campo vettoriale divenuto “pesante”, per dotarlo del terzo stato di polarizzazione

rottura spontanea di SU(2) locale

In maniera analoga si procede per SU(2).
In questo caso ϕ è uno spinore a due componenti complesse.

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}$$

la condizione di minimo diventa ora: $\varphi^+\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2\right) = \frac{v^2}{2}$

rompiamo la simmetria scegliendo diversa da zero solo la terza componente (reale) di ϕ, e scegliamo un gauge in cui

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

Ora tre componenti scalari sono scomparse per dare i gradi di libertà longitudinali (richiesti dalla massa) ai tre campi vettoriali di gauge, W_i ed è rimasto solo uno scalare di Higgs massivo.

Il conteggio dei gradi di libertà è rispettato ancora una volta:
3 vettori a massa nulla + 4 scalari = 3 vettori massivi + 1 scalare