

e finalmente, GWS

fermioni l.h. in doppietti di isospin,
fermioni r.h. in singoletti

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \end{bmatrix}_L & \begin{matrix} \nu_{eR} \\ e_R^- \end{matrix} &
 \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{bmatrix}_L & \begin{matrix} \nu_{\mu R} \\ \mu_R^- \end{matrix} &
 \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{bmatrix}_L & \begin{matrix} \nu_{\tau R} \\ \tau_R^- \end{matrix} \\
 \\
 \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L & \begin{matrix} u_R \\ d_R \end{matrix} &
 \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}_L & \begin{matrix} c_R \\ s_R \end{matrix} &
 \begin{bmatrix} t \\ b \end{bmatrix}_L & \begin{matrix} t_R \\ b_R \end{matrix}
 \end{array}$$

simmetrie locali di gauge per isospin e ipercarica
bosoni vettori di gauge

$$\begin{array}{lll}
 SU(2) & \textit{isospin} & W_\mu^i \quad \text{isotriplet } i = 1, 2, 3 \\
 U(1) & \textit{hypercharge} & B_\mu
 \end{array}$$

ipercarica debole

$$j_\mu^{em} = j_\mu^3 + \frac{1}{2} j_\mu^Y$$

$$Y = 2(Q - I_3)$$

$$Y = 2\langle Q \rangle$$

	I	I_3	Q	Y
ν_e	$1/2$	$1/2$	0	-1
e^-_L	$1/2$	$-1/2$	-1	-1
e^-_R	0	0	-1	-2
u_L	$1/2$	$1/2$	$2/3$	$1/3$
d'_L	$1/2$	$-1/2$	$-1/3$	$1/3$
u_R	0	0	$2/3$	$4/3$
d'_R	0	0	$-1/3$	$-2/3$

Lagrangiana elettrodebole invariante sotto $SU(2)_{\text{isospin}}$ e $U(1)_Y$

BJ 13.6.6

$$L = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\vec{I}\vec{W}_\mu + i\frac{g'}{2}YB_\mu$$

$$\begin{aligned}\vec{W}_\mu &\rightarrow \vec{W}_\mu + \partial_\mu \vec{\Lambda}(x) + g\vec{\Lambda}(x) \wedge \vec{W}_\mu && \Leftarrow SU(2)_{\text{isospin}} \\ B_\mu &\rightarrow B_\mu + \partial_\mu \lambda(x) && \Leftarrow U(1)_Y\end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - g\vec{I}\vec{W}_\mu - \frac{g'}{2}YB_\mu \right] \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - \frac{g'}{2}YB_\mu \right] \psi_R$$

a cui possiamo aggiungere i termini cinetici $-\frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$

Lagrangiana di un campo scalare complesso invariante sotto SU(2)

$$L = (\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) - \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2$$

BJ 13.6.11

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\vec{\tau} \vec{W}_\mu}{2}$$

$$\vec{W}_\mu \rightarrow \vec{W}_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\Lambda}(x) - \vec{\Lambda}(x) \wedge \vec{W}_\mu$$

$$\Rightarrow L = \left(\partial_\mu \varphi + ig \frac{\vec{\tau} \vec{W}_\mu}{2} \varphi \right)^\dagger \left(\partial^\mu \varphi + ig \frac{\vec{\tau} \vec{W}^\mu}{2} \varphi \right) - \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2$$

e infine usiamo il meccanismo di Higgs, $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix} \rightarrow \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v - H(x) \end{pmatrix}$

la Lagrangiana elettrodebole

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{fermions} + \mathcal{L}_{Higgs}$$

il primo termine è dato da: $\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B_{\mu\nu}$

dove i tensori dei campi sono dati da:

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig[W_\mu W_\nu - W_\nu W_\mu]$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

il secondo termine è

$$\mathcal{L}_{fermions} = \sum_f (\bar{L}_f D L_f + f_R D f_R)$$

dove, ad esempio

$$\bar{L}_e D L_e = (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) D \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$$

le derivate covarianti contengono sia l'accoppiamento con W , $\frac{i}{2}g\tau_j W_j^\mu$
con costante g , sia l'accoppiamento con B , con costante g' : $\frac{i}{2}g'B^\mu$

si noti che non sono introdotti termini di massa, che romperebbero la invarianza isotopica

$$-m\bar{e}e = -m\bar{e}\left[\frac{1}{2}(1-\gamma^5) + \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\right]e = -m(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R)$$

i bosoni carichi

Notiamo che nella derivata covariante può essere fatta la sostituzione:

$$I^i W_\mu^i = I^1 W_\mu^1 + I^2 W_\mu^2 + I^3 W_\mu^3 = I^+ W_\mu^+ + I^- W_\mu^- + I^3 W_\mu^3$$
$$I^+ = \frac{I^1 + iI^2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I^- = \frac{I^1 - iI^2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$W^+ = \frac{W^1 - iW^2}{\sqrt{2}}, W^- = \frac{W^1 + iW^2}{\sqrt{2}}$$

In questa forma si esplicita che i primi due termini nell'interazione trasformano un fermione down nel fermione up e viceversa, sono quindi i termini corrispondenti alla corrente carica debole.

Il terzo termine è invece diagonale, come B , e corrisponde alla corrente debole neutra

la componente di Higgs della lagrangiana

$$\mathcal{L}_{Higgs} = |D_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda}{2} \left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 + \text{termini di interazione coi fermioni}$$

contiene i termini di interazione tra l'Higgs e i bosoni, e il potenziale di autointerazione già noti

dalla forma esplicita della derivata covariante di ϕ si ricavano i termini di massa dei bosoni, che risultano essere dati da

$$\frac{v^2}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu)^2 + \frac{v^2}{4} g^2 W_\mu^- W^{+\mu}$$

dove il primo campo bosonico, ponendo $\tan \vartheta = g'/g$

diventa $g \left(W_\mu^3 - \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} B_\mu \right)$ e ponendo $Z_\mu = (\cos \vartheta W_\mu^3 - \sin \vartheta B_\mu)$

$$\frac{v^2}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu)^2 + \frac{v^2}{4} g^2 W_\mu^- W^{+\mu} = \frac{v^2}{4} \frac{g^2}{\cos^2 \vartheta} Z_\mu Z^\mu + \frac{v^2}{4} g^2 W_\mu^- W^{+\mu}$$

masse dei bosoni intermedi

la combinazione ortogonale $A_\mu = \sin \vartheta_W W_\mu^3 + \cos \vartheta_W B_\mu$
rimane priva di massa e rappresenta il campo del fotone

In tutto il percorso, il conteggio dei gradi di libertà è ancora una volta rispettato:

4 vettori a massa nulla + 4 scalari =

3 vettori massivi + 1 vettore a massa nulla + 1 scalare

Le masse sono quindi:

$$\begin{array}{ll}
 \text{charged weak bosons } W^\pm & M_{W^\pm}^2 = \frac{1}{4}g_W^2 v^2 \\
 \text{neutral weak boson } Z & M_Z^2 = \frac{1}{4}(g_W^2 + g_W'^2)v^2 \\
 \text{photon } \gamma & M_\gamma^2 = 0
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_W}{M_Z} = \cos \vartheta_W$$

combinando la prima relazione con la relazione $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$

si ottiene il valore di v $v = [1/\sqrt{2}G_F]^{1/2}$
 $\simeq 246 \text{ GeV}$

le masse dei fermioni

Nella Lagrangiana dell'Higgs i termini invarianti che rappresentano l'interazione tra leptoni e Higgs sono del tipo:

$$g_l (\bar{L}_l \phi l_r + \bar{l}_r \bar{\phi} L_l) \quad \text{che dopo la rottura spontanea} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

diventa $\frac{g_l}{\sqrt{2}} (\bar{l}_L^d l_R^d + \bar{l}_R^d l_L^d)(v + H(x)) = \frac{g_l}{\sqrt{2}} (\bar{l}^d l^d)(v + H(x))$

il primo termine rappresenta l'interazione del leptone con lo stato fondamentale dell'Higgs, ossia il vuoto asimmetrico, ed appare come un termine di massa per il leptone, con

$$m_l = \frac{1}{\sqrt{2}} g_l v \quad (\text{il valore di } g_l \text{ non è predetto dalla teoria})$$

il secondo termine rappresenta l'interazione del fermione col campo di Higgs, che risulta quindi proporzionale alla massa:

$$\frac{m_f}{v} l \bar{l} H$$

Estensione ai quark (o ai neutrini pesanti...)

$$g_f^d \bar{f}_L^d \varphi f_R^d + g_f^u \bar{f}_L^u \tilde{\varphi} f_R^u + \text{h.c.}$$

la massa dell'Higgs

dalla Lagrangiana, la massa dell'Higgs è $M_H^2 = \lambda v^2$

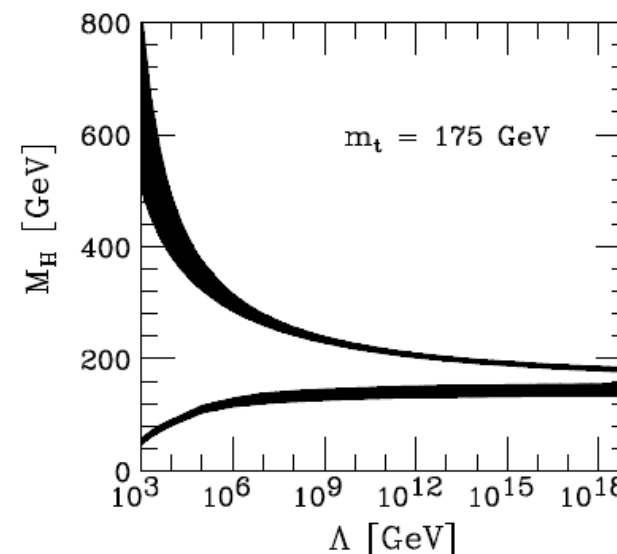
e quindi dipende dall'accoppiamento quartico, che è sconosciuto

Un primo limite si può porre dal limite unitario per la ampiezza

$$f_0[W_L W_L \rightarrow W_L W_L] \rightarrow \frac{G_F M_H^2}{4\sqrt{2}\pi}$$

da cui segue $M_H^2 \leq 2\sqrt{2}\pi/G_F \sim (850 \text{ GeV})^2$

Vedremo a suo tempo che si può poi porre un limite superiore ed inferiore in funzione della scala di validità dello SM, dovute rispettivamente alle correzioni dell'auto-interazione dovute ai loop con lo stesso Higgs (lim. superiore) e a quelli col top (lim. inferiore)



10/05/2009

giovedì 8 ottobre 2009

relazioni tra le costanti di accoppiamento

se riscriviamo la Lagrangiana fermionica per Z e A,

$$\begin{cases} A = W^3 \sin \vartheta + B \cos \vartheta \\ Z = W^3 \cos \vartheta - B \sin \vartheta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} W^3 = A \sin \vartheta + Z \cos \vartheta \\ B = A \cos \vartheta - Z \sin \vartheta \end{cases} \quad g I^3 W^3 + g' \frac{Y}{2} B = \left(g I^3 \sin \vartheta + g' \frac{Y}{2} \cos \vartheta \right) A + \left(g I^3 \cos \vartheta - g' \frac{Y}{2} \sin \vartheta \right) Z$$

tenendo conto che $Q = I_3 + Y/2$, il primo termine riproduce la corrente

elettromagnetica se $e = g' \cos \vartheta_W = g \sin \vartheta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$

mentre l'accoppiamento a Z risulta proporzionale a

$$(g \cos \vartheta I^3 - g' (Q - I^3) \sin \vartheta) Z = \left(g \cos \vartheta I^3 - \frac{g \sin \vartheta}{\cos \vartheta} (Q - I^3) \sin \vartheta \right) Z = \frac{g}{\cos \vartheta} (I^3 - Q \sin^2 \vartheta) Z$$

se poi confrontiamo la corrente neutra che ne risulta,

$$J_\mu^{NC} = j_\mu^3 - \sin^2 \vartheta_W j_\mu^{em} = \bar{u}_f \gamma_\mu \left[\frac{1}{2} (1 - \gamma^5) I_3 - Q \sin^2 \vartheta_W \right] u_f$$

con la corrente neutra fenomenologica

$$J_\mu^{NC} = \bar{u}_f \gamma_\mu \frac{1}{2} (c_V - c_A \gamma^5) u_f$$

troviamo
$$\begin{cases} c_V^f = I_3^f - 2Q^f \sin^2 \vartheta_W \\ c_A^f = I_3^f \end{cases}$$

(Tutte queste relazioni valgono per qualunque fermione, destro- o levo-giro)

un semplice conto

Conoscendo ν , e e θ_w si possono calcolare g , g' , M_Z e M_W .
Per usare le costanti misurate con maggior precisione,
conviene usare G_F , α e M_Z .

$$e = \sqrt{4\pi\alpha} = g \sin \vartheta_w \quad \nu = \sqrt{\frac{1}{G_F \sqrt{2}}}$$

$$M_Z = \frac{g}{2 \cos \vartheta_w} \nu = \frac{g}{2 \cos \vartheta_w} \sqrt{\frac{1}{G_F \sqrt{2}}}$$

$$M_Z = \frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{2 \cos \vartheta_w \sin \vartheta_w} \sqrt{\frac{1}{G_F \sqrt{2}}}$$

$$\cos \vartheta_w \sin \vartheta_w = \frac{1}{M_Z} \sqrt{\frac{\pi\alpha}{G_F \sqrt{2}}}$$

$$\alpha = \frac{1}{137.036}$$

$$G_F = 1.16637(1)$$

$$M_Z = 91.187(2)$$

da cui si ricava

$$\sin^2 \vartheta_w = 0.2121$$

$$M_W = 80.939(2)$$

contro un valore sperimentale

$$M_W = 80.40(3)$$

si ottiene un risultato incredibilmente preciso, $\sim 6\%$
ma anche incredibilmente sbagliato, 12σ !

calcoletti di trigonometria...

$$\cos \vartheta_w \sin \vartheta_w = \frac{1}{2} \sin(2\vartheta_w)$$

$$\vartheta_w = \frac{1}{2} \arcsin(2 \cos \vartheta_w \sin \vartheta_w)$$

$$\sin^2 \vartheta_w = \sin^2 \left(\frac{1}{2} \arcsin(2 \cos \vartheta_w \sin \vartheta_w) \right)$$

$$\cos^2 \vartheta_w \sin^2 \vartheta_w = \frac{1}{M_Z^2} \frac{\pi\alpha}{G_F \sqrt{2}}$$

$$(1 - \sin^2 \vartheta_w) \sin^2 \vartheta_w = \frac{1}{M_Z^2} \frac{\pi\alpha}{G_F \sqrt{2}}$$

$$\sin^4 \vartheta_w - \sin^2 \vartheta_w + \frac{1}{M_Z^2} \frac{\pi\alpha}{G_F \sqrt{2}} = 0$$

$$\sin^2 \vartheta_w = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{1}{M_Z^2} \frac{\pi\alpha}{G_F \sqrt{2}}} \right)$$

$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

La cromodinamica quantistica può essere inserita senza particolari problemi. La Lagrangiana di gauge diventa:

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a$$

con $G_{\mu\nu}^a = \partial_\nu G_\mu^a - \partial_\mu G_\nu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$

le derivate covarianti diventano:

$$iD_\mu = i\partial_\mu + g_W I^i W_\mu^i - g'_W \frac{Y}{2} B_\mu + g_s T^a G_\mu^a$$

dove i G^a sono gli otto bosoni di gauge che rendono invariante la Lagrangiana, T^a sono i generatori (non commutanti) delle trasformazioni di colore, e $g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s}$ è la costante di accoppiamento forte

teorie di campo rinormalizzabili

Nei campi in interazione, il principio di indeterminazione consente l'emissione ed il riassorbimento di altri campi, secondo le interazioni ammesse per i campi di partenza. Questi effetti modificano, o “rinormalizzano”, masse e costanti di accoppiamento. Questi effetti possono essere calcolati con i grafici di Feynman.

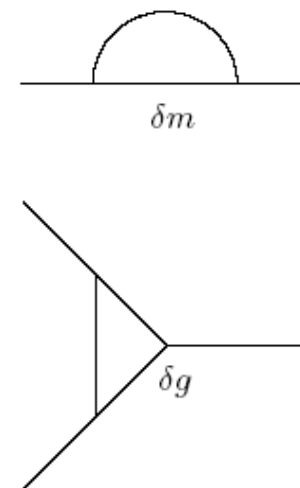
Tipici esempi sono le correzioni di autoenergia e di vertice, che divergono per accoppiamenti puntiformi come

$$\int d^4k/k^4 \sim \log \Lambda_{cut}^2, \text{ dove } \Lambda_{cut}^{-1}$$

è la scala fino alla quale l'interazione appare puntiforme. Le masse e le costanti di accoppiamento osservabili sono quelle rinormalizzate e la connessione con le costanti “nude” può essere espressa come:

$$\begin{aligned} m_0 + \delta m &= m \\ g_0 + \delta g &= g \end{aligned}$$

Perché i calcoli della teoria siano ben definiti, è necessario uno schema di calcolo che assorba in modo coerente tutte le divergenze nei termini nudi, lasciando tutte le osservabili finite nel limite $\Lambda_{cut}^{-1} \rightarrow 0$



La teoria elettrodebole è rinormalizzabile

t'Hooft, Veltman, 1971

l'esempio della QED

Se si calcolano le correzioni dovute ai diagrammi $O(\alpha^2)$ al propagatore fotonico, si trova:

$$\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} (1 - I(q^2))$$
$$I(q^2) = \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-q^2}\right) = \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right) \quad (\text{dove } \alpha_0 \text{ è la costante nuda})$$

e sommando su tutti gli ordini si ha:

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right)}$$

benché la correzione sia infinita per $\Lambda \rightarrow \infty$, questa correzione è riassorbita in α_0 , non osservabile, lasciando α rinormalizzata, ossia finita.

costanti running

Tuttavia rimane una debole dipendenza da Q^2 .
Infatti supponiamo di misurare α ad un certo $Q^2=\mu$.

Avremo
$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)}$$

se ora misuriamo α ad un altro Q^2 , avremo

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right)} = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + \ln\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right) \right]} = \frac{\alpha_0}{\frac{\alpha_0}{\alpha(\mu^2)} + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)} = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)}$$

Come si vede, nella relazione tra i due α è scomparsa ogni dipendenza da α_0 , non misurabile.

Tuttavia, α dipende da Q^2 , è una costante running