

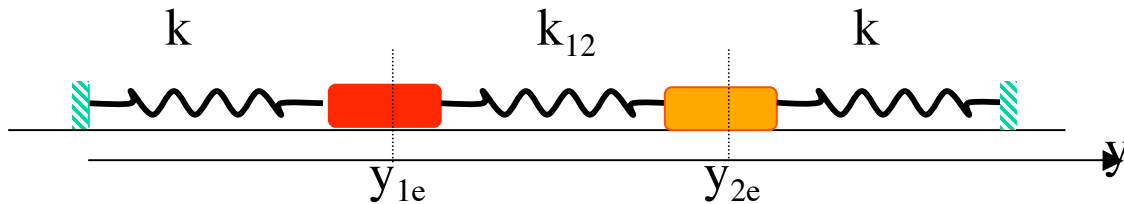
oscillatori accoppiati

Un sistema di oscillatori accoppiati si può facilmente realizzare appendendo più pendoli di varie lunghezze ad un unico filo: la torsione del filo, provocata dall'oscillazione di uno dei pendoli, si trasmette a tutti gli altri.
In alternativa, si possono connettere due carrellini con tre molle come indicato in figura.

osservazione del comportamento di oscillatori accoppiati: interpretazione in base al fenomeno della risonanza

due oscillatori accoppiati identici: periodico trasferimento dell'oscillazione da un pendolo all'altro

la teoria di due oscillatori accoppiati identici:



spostamenti rispetto all'equilibrio: $x_1 = y_1 - y_{1e}$ e $x_2 = y_2 - y_{2e}$

le equazioni per ciascun oscillatore:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{cases}$$

sistema di due equazioni differenziali in due funzioni incognite accoppiate. varie possibilità di soluzione, per esempio sommando e sottraendo

$$\begin{cases} m \frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - 2k_{12}(x_2 - x_1) \\ m \frac{d^2(x_2 + x_1)}{dt^2} = -k(x_2 + x_1) \end{cases}$$

il che equivale ad un cambiamento di variabili (o di base).

Le soluzioni sono naturalmente due oscillazioni armoniche delle nuove variabili:

$$\begin{cases} \xi_1 = x_2 + x_1 = \xi_{01} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) & \omega_1 = \sqrt{k/m} \\ \xi_2 = x_2 - x_1 = \xi_{02} \sin(\omega t + \varphi) & \omega_2 = \sqrt{(k + 2k_{1,2})/m} \end{cases}$$

cosa rappresentano le nuove variabili?

$x_2 + x_1 \neq 0, x_2 - x_1 = 0$ la distanza tra i due oscillatori è sempre la stessa, i due oscillatori si muovono in fase e la molla centrale non è mai sollecitata (la frequenza dipende solo dalle molle esterne)

$x_2 - x_1 \neq 0, x_2 + x_1 = 0$ il baricentro dei due oscillatori è fermo, i due oscillatori si muovono in opposizione di fase, la molla centrale partecipa alle sollecitazioni (e la frequenza dipende anche da essa)

questi sono i due modi normali.

il moto dei singoli oscillatori si riottiene sommando e sottraendo le soluzioni

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} [\xi_{01} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \xi_{02} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] \\ x_1 = \frac{1}{2} [\xi_{01} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \xi_{02} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] \end{cases}$$

si vede che se c'è un solo modo normale, ciascun oscillatore si muove di moto puramente armonico

se sono presenti entrambi i modi, il moto non è puramente armonico, ed utilizzando le formule di prostaferesi con

$$\xi_1 = \xi_2 = x_0, \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \omega_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, \omega_p = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \text{ si trova:}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_0 \cos(\omega_m t) \sin(\omega_p t) \\ x_2 = 2x_0 \sin(\omega_m t) \cos(\omega_p t) \end{cases}$$

il moto di ciascun oscillatore è una sinusoide alla frequenza portante, modulata da una sinusoide alla frequenza modulante. Come si vede dalla fase di seno e coseno, quando l'oscillazione del primo oscillatore è massima, il secondo è fermo e viceversa, come si è già osservato sperimentalmente.

Notiamo anche che la comprensione dei due modi normali come modi "naturali" di oscillazione del sistema è abbastanza intuitiva, e non richiede la trattazione delle equazioni differenziali. E' anche facile da verificare sperimentalmente sia coi pendoli che con i carrellini. Con i carrellini, a causa del forte accoppiamento, le frequenze dei due modi normali appaiono subito diverse, mentre per i pendoli è necessaria una misura precisa.

La ricostruzione dei moti individuali come "sovrapposizione" dei due modi normali può essere fatta euristicamente confrontando su un foglio excel i risultati delle formule di prostaferesi con le leggi orarie osservate.

Che la somma di due soluzioni sia ancora una soluzione (**il principio di sovrapposizione**, appunto) è tutt'altro che banale, ed è una diretta conseguenza della linearità delle equazioni.

E' importante sottolineare che i modi normali rappresentano gli stati fondamentali del sistema, e che tutti gli altri possibili stati (la cui varietà dipende dalle condizioni iniziali) possono essere espressi come combinazione lineare dei due modi normali.

D'altra parte, il moto del singolo carrellino non può essere determinato da solo (in base alle sue sole condizioni iniziali).

In questo trattamento del sistema attraverso i modi normali è fortissima l'analogia con lo sviluppo di uno stato quantistico in una base di stati fondamentali: pochi sistemi classici richiedono una trattazione così affine alla meccanica quantistica.

Un esempio quantistico molto "moderno": le oscillazioni di neutrino.

I neutrini sono prodotti come stati di sapore (neutrino elettronico, neutrino muonico) ma si propagano come autostati di massa (che possono essere considerati i loro modi normali): dopo un certo tempo (ad una certa distanza) il neutrino di tipo elettronico può essersi trasformato in un neutrino di tipo muonico. Perché l'oscillazione avvenga, i due autostati di massa devono avere masse differenti (le due frequenze dei modi normali) e quindi almeno una delle due diversa da zero. Per questo l'osservazione sperimentale delle oscillazioni di sapore (scoperta negli ultimi anni) equivale a dimostrare che i neutrini devono avere masse diverse da zero.

E' notevole il fatto che, nonostante si parta da una trattazione quantistica completamente diversa (non si tratta di oscillatori meccanici), le formule finali che danno la probabilità di osservare i due sapori in funzione della distanza a cui si osservano sono identiche alle formule di prostaferesi. Anche queste dipendono dalla differenza delle masse, come la frequenza modulante dipende dalla differenza delle due frequenze dei modi normali