

Masse e Oscillazioni dei Neutrini Lezione II

Corso di Fisica Nucleare e Subnucleare III

Lucio Ludovici 9 dicembre 2009

Oggi...

- × Massa di Majorana
- × La massa per un solo sapore di neutrino
- × Estensione a tre sapori di neutrino
- × La matrice di mescolamento

La massa di un neutrino di Dirac

$$m_D \bar{\psi} \psi = m_D (\bar{\psi}_R \psi_L + h.c.)$$

Yukawa coupling

Higgs field

Connette le diverse elicità di stati distinti:
 neutrino LH(attivo) con neutrino RH(sterile) e
 antineutrino RH(attivo) con antineutrino LH(sterile)

Flip di elicità

Massa di un neutrino di Majorana

$$\psi^M = \psi_L + \psi_L^c$$

Per un neutrino di Majorana ci sono solo 2 termini di massa (bilineari)

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2}m_M \bar{\psi}^M \psi^M$$

(1/2 evita il doppio conteggio nelle equazioni di Eulero-Lagrange per il campo di Majorana)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^M &= -\frac{1}{2}m_M(\bar{\psi}_L^c \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_L^c) \\ &= -\frac{1}{2}m_M \bar{\psi}_L^c \psi_L + \text{h.c.}\end{aligned}$$

$(\bar{\psi}_L \psi_L \equiv \bar{\psi}_L^c \psi_L^c \equiv 0)$

$\bar{\psi}_L^c \psi_L \xrightarrow{\psi_L \rightarrow e^{i\phi} \psi_L} e^{i2\phi} \bar{\psi}_L^c \psi_L$



...e i leptoni carichi ?

Connette le diverse elicità di uno stesso stato:
neutrino($\equiv$ antineutrino) LH con lo stesso neutrino RH

Flip di elicità

Massa di Dirac-Majorana

In presenza di un solo neutrino LH $\nu_L, \bar{\nu}_L$ l'unico termine di massa possibile è quello di Majorana

$$\mathcal{L}_L^M = -\frac{1}{2}m_L\bar{\nu}_L^c\nu_L + \text{h.c.}$$

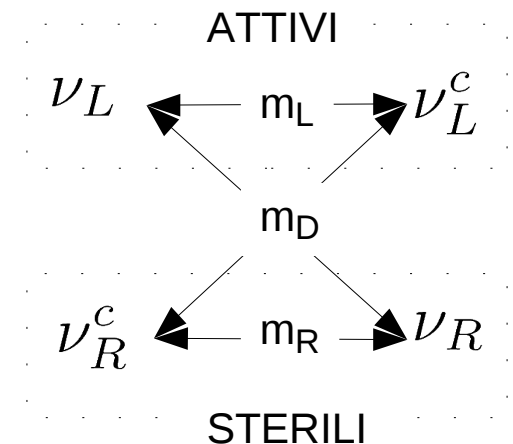
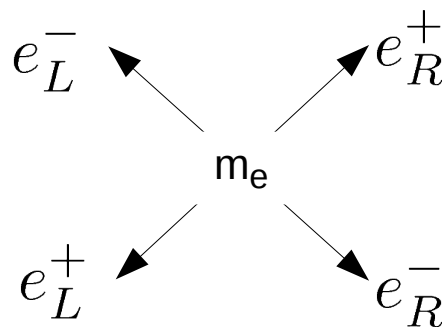
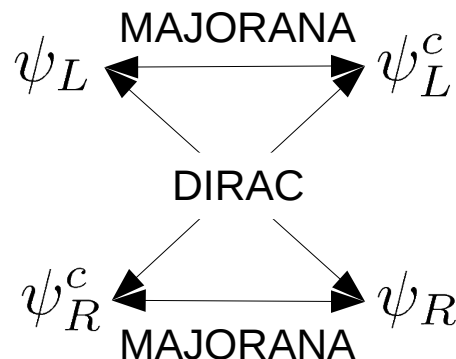
→ $\nu \equiv \nu_L + \nu_L^c \equiv \nu^c$ neutrino di Majorana, 2 componenti ν_+, ν_-

In presenza di neutrini RH il termine di massa più generale diventa

$$\mathcal{L}^{D+M} = \mathcal{L}^D + \mathcal{L}_L^M + \mathcal{L}_R^M$$

$$\mathcal{L}_R^M = -\frac{1}{2}m_R\bar{\nu}_R^c\nu_R + \text{h.c.}$$

$$\mathcal{L}^D = -m_D\bar{\nu}_R\nu_L + \text{h.c.}$$



Matrice di massa per un neutrino

I termini di massa di Dirac-Majorana

$$\mathcal{L}^{D+M} = -m_D \bar{\nu}_R \nu_L - \frac{1}{2} m_L \bar{\nu}_L^c \nu_L - \frac{1}{2} m_R \bar{\nu}_R^c \nu_R + \text{h.c.}$$

possono essere scritti in forma matriciale

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^c & \bar{\nu}_R \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{N}}_L^c} \underbrace{\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}}_{\mathbf{N}_L} + \text{h.c.}$$

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{N}}_L^c \mathbf{M} \mathbf{N}_L + \text{h.c.}$$

$\mathbf{N}_L$	componenti LH
$\bar{\mathbf{N}}_L^c$	componenti RH

I campi ν_L^c, ν_R non sono associati a particelle di massa definita

Hanno massa definita gli autostati della matrice di massa $\mathbf{M}$

Vediamo come si diagonalizza la matrice di massa

Il meccanismo del See-Saw



Diagonalizzazione della matrice di massa

La matrice di massa $\mathbf{M}$ è diagonalizzata da $\mathbf{N}_L = \mathbf{U} n_L$

$\mathbf{U} \rightarrow$ matrice unitaria (matrice di mixing), con $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{1}$ $n_L = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{N}_L$

$n_L \rightarrow$ autostati di massa LH, con $n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{M} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad m_i \text{ reali } > 0$$

Per semplicità consideriamo il caso m_D reale $\rightarrow \mathbf{M}$ reale
(m_L, m_R sempre reali con un cambiamento di fase dei campi)

Per $\mathbf{M}$ reale si può porre: $\mathbf{U} = \mathbf{O} \mathbf{\Omega}$ ↗ rotazione
↘ matrice diagonale di fasi
(necessaria per avere m_i reali > 0)

$$\mathbf{O}^\top \mathbf{O} = \mathbf{1} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_1} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{O}^\top \mathbf{M} \mathbf{O} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

Diagonalizzazione della matrice di massa

Risolvendo l'equazione secolare:

$$\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L}$$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left[m_L + m_R \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right]$$

$(m_L + m_R)^2 - 4(m_L m_R - m_D^2)$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{\Omega}^T \mathbf{O}^T \mathbf{M} \mathbf{\Omega} \mathbf{O} = \begin{pmatrix} e^{2i\omega_1} \mu_1 & 0 \\ 0 & e^{2i\omega_2} \mu_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

A una scelta opportuna delle fasi $\mathbf{\Omega}$ corrispondono masse sempre >0

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{2} \left| m_L + m_R - \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right| \\ m_2 = \frac{1}{2} \left[m_L + m_R + \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right] \end{cases}, \omega_1 = \begin{cases} \pi/2 & m_D^2 > m_L m_R \\ 0 & m_D^2 < m_L m_R \end{cases}$$

$$, \omega_2 = 0$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{O} \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega} \cos \theta & \sin \theta \\ -e^{i\omega} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dirac+Majorana $\rightarrow$ Majorana

Nella base diagonale: $n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{n}_L^c \text{diag}(m_1, m_2) n_L + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \bar{\nu}_{kL}^c \nu_{kL} + \text{h.c.}$$

La diagonalizzazione della matrice di massa più generale, ottenuta scrivendo tutti i termini possibili (Dirac e Majorana), è la somma di termini di massa per i neutrini di Majorana:

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^c, \quad k = 1, 2$$

$$\nu_k = \nu_k^c$$

Casistica

I. Dirac: $m_L = m_R \equiv 0$

$$m_2 = m_1 = m_D$$

2 neutrini di Majorana degeneri di CP opposta $\equiv$ 1 neutrino di Dirac

II. Pseudo- Dirac: $m_D \gg m_L, m_R$ $m_{21} = m_D \pm \frac{m_L + m_R}{2}$

2 neutrini di Majorana quasi-degeneri $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2 = 2m_D(m_L + m_R)$

III. Puro Majorana: $m_D = 0$

2 neutrini di Majorana

IV. See-Saw (Altalena): $m_L = 0$ $m_D \ll m_R$

2 neutrini di Majorana, uno di massa grande e uno di massa piccola

Il meccanismo del See-Saw (altalena)

Matrice di massa $\begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}$ con $m_D \ll m_R$

Dalla soluzione generale dell'equazione secolare:

$$\theta \simeq \frac{m_D}{m_R} = \epsilon \ll 1 \quad \begin{aligned} m_1 &\simeq \frac{m_D^2}{m_R} = \left(\frac{m_D}{m_R}\right)m_D \ll m_D \\ m_2 &\simeq m_R \end{aligned}$$

$$\mathbf{U} \simeq \begin{pmatrix} i & \epsilon \\ -i\epsilon & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \nu_{1L} \simeq -i\nu_L + i\epsilon\nu_R^c \\ \nu_{2L} \simeq \epsilon\nu_L + \nu_R^c \end{cases} \quad \begin{aligned} m_1 &\simeq \epsilon m_D \ll m_D \\ m_2 &\simeq m_R \gg m_D \end{aligned}$$

Conseguenze del See-Saw

1. piccole masse per i neutrini ($\ll$ masse fermioni carichi)
2. i neutrini sono particelle di Majorana
3. i neutrini “sterili” hanno masse molto grandi e sono praticamente disaccoppiati da quelli “attivi”

Plausibilità del See-Saw

$m_L = 0$ motivato dal fatto che $\bar{\nu}_L^c \nu_L$ è un tripletto di isospin debole (prodotto di due doppietti di SU(2)). Termini di massa diretti sono vietati dalla simmetria di gauge e nel MS minimale non ci sono triplette di Higgs per crearli attraverso lo SSB

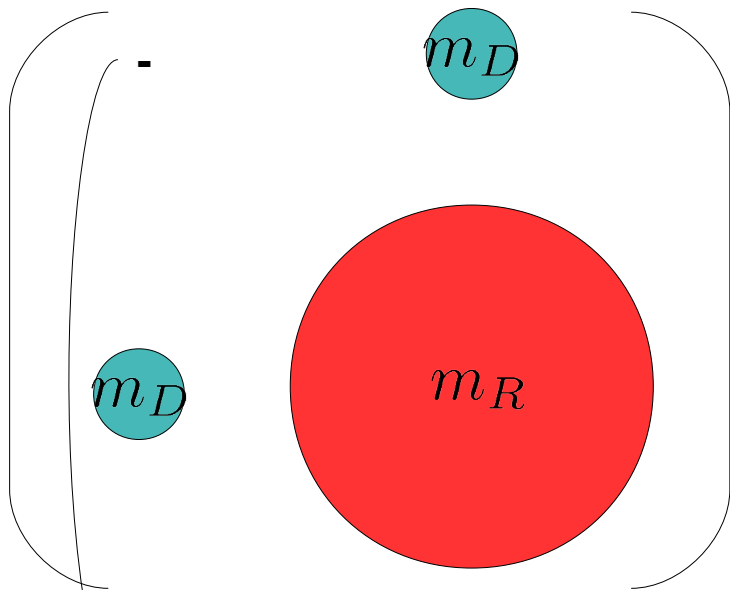
$m_R \gg m_D$ I termini di Dirac sono creati dallo SSB e quindi è ragionevole assumere che m_D sia dello stesso ordine degli altri fermioni o della scala di rottura della simmetria del MS. Al contrario $\bar{\nu}_R^c \nu_R$ è un singoletto di isospin e pertanto m_R può assumere qualsiasi valore. Se esiste un gruppo più ampio $G \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ di cui il MS è il limite di bassa energia, è ragionevole che m_R abbia un valore corrispondente alla scala di rottura del gruppo più ampio

Che scala dovrebbe avere m_R ?

$$m_R = \frac{m_D^2}{m_\nu} \sim \frac{(\langle \Phi^0 \rangle)^2}{m_\nu} \sim \frac{(246/\sqrt{2})^2}{0.05 \cdot 10^{-9}} \sim 10^{15} \text{ GeV} \longrightarrow \text{GUT scale !!}$$

II See-Saw

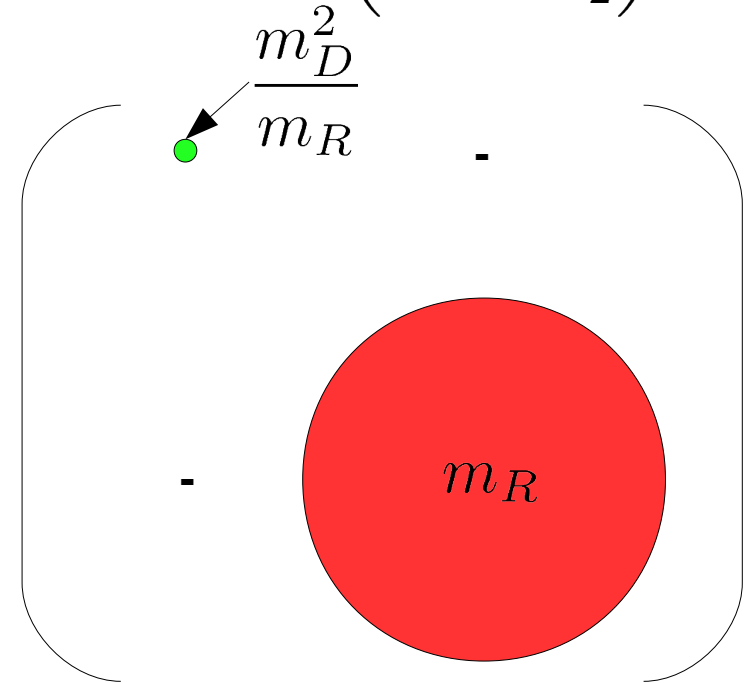
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \gg m_D \end{pmatrix}$$



→ $m_L \neq 0$: operatore efficace dim-5

$$\Lambda \sim m_R \quad m_1 \rightarrow \left| m_L - \frac{m_D^2}{m_R} \right|$$

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{M} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$



$$\mathcal{L}^5 \propto \frac{1}{\Lambda} (L^\top L) (\Phi^\top \Phi)$$

rimane del tipo See-Saw

3 famiglie di neutrini

Osservazione sperimentale di ν_e, ν_μ, ν_τ
 Accoppiamenti con W,Z previsti dal MS

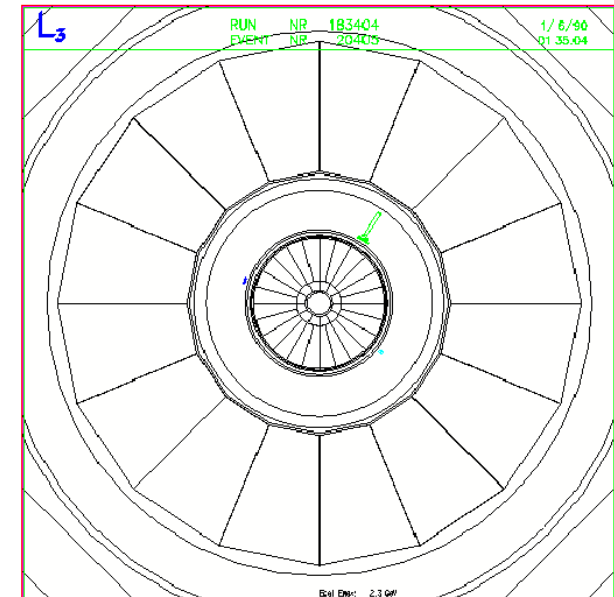
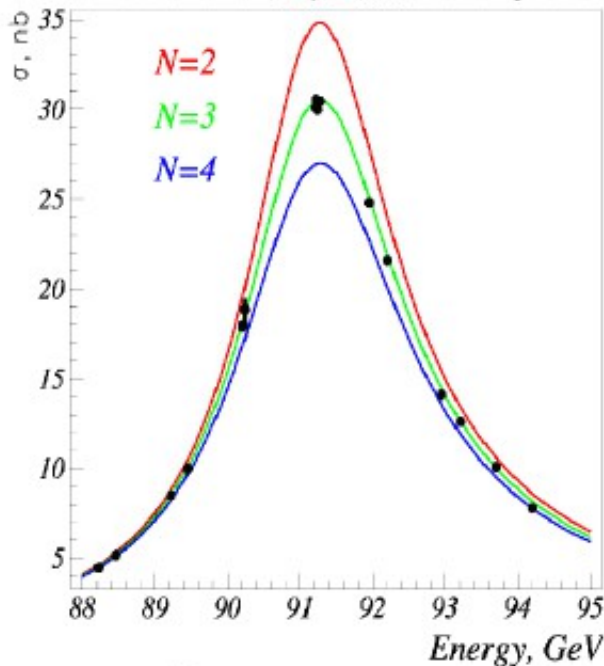
LEP: $Z \rightarrow \Sigma_\alpha \bar{\nu}_\alpha \nu_\alpha$

$$\frac{\Gamma(Z \rightarrow \text{invisibile})}{\Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}\nu)_{\text{SM}}}$$

$$e^+e^- \rightarrow Z\gamma \rightarrow \bar{\nu}_\alpha \nu_\alpha \gamma$$

$$N_\nu = 2.9840 \pm 0.0082$$

$$N_\nu = 2.93 \pm 0.05$$



Massa per 3 neutrini “attivi”

Le interazioni dei neutrini nel MS sono mediate da:

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{-g}{2\sqrt{2}} J_{\mu}^{CC} W^{\mu} + \text{h.c.}$$

$$J_{\mu}^{CC} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma_{\mu} l_{\alpha L}$$

$$\mathcal{L}_{NC} = \frac{-g}{2 \cos \theta_W} J_{\mu}^{NC} Z^{\mu} + \text{h.c.}$$

$$J_{\mu}^{NC} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma_{\mu} \nu_{\alpha L}$$

Oltre a $\nu_{\alpha L} = \nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$ neutrini “attivi” (LH) introduciamo anche 3 (in generale ≥ 3) campi “sterili” (RH) $\nu_{s_i R}$

Il termine di massa più generale è $\mathcal{L}^{D+M} = \mathcal{L}^D + \mathcal{L}_L^M + \mathcal{L}_R^M$

con

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{s,\alpha} \bar{\nu}_{sR} \mathbf{M}_{s,\alpha}^D \nu_{\beta L} + \text{h.c.}$$

$$\mathcal{L}_L^M = - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \bar{\nu}_{\alpha L}^c \mathbf{M}_{\alpha,\beta}^L \nu_{\beta L} + \text{h.c.}$$

$$\mathcal{L}_R^M = - \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \bar{\nu}_{sR}^c \mathbf{M}_{s,s'}^R \nu_{s'R} + \text{h.c.}$$

Matrice di massa (caso generale)

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{N}_L^c \mathbb{M} N_L + \text{h.c.}$$

definendo il vettore 6x1 $N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}$ con $\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}$ $\nu_R^c = \begin{pmatrix} \nu_{s_1 R}^c \\ \nu_{s_2 R}^c \\ \nu_{s_3 R}^c \end{pmatrix}$

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^L & (\mathbf{M}^D)^T \\ \mathbf{M}^D & \mathbf{M}^R \end{pmatrix} \text{ matrice 6x6}$$

è diagonalizzata da $N_L = U n_L$, $U^T \mathbb{M} U$ con $U^\dagger U = 1$ $n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \dots \\ \nu_{6L} \end{pmatrix}$

$$U^T \mathbb{M} U = \text{diag}(m_1, \dots, m_6) \quad m_k \in \mathbb{R} > 0$$

Bilenky, Petcov
Rev.Mod.Phys.59(1987)671

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1,6} m_k \bar{\nu}_k^c \nu_k + \text{h.c.}$$

autostati di massa $\rightarrow$
neutrini di Majorana

$$\begin{cases} \nu_{\alpha L} = \sum_{k=1,6} U_{\alpha k} \nu_{kL} & \alpha = e, \mu, \tau \\ \nu_{sR}^c = \sum_{k=1,6} U_{sk} \nu_{kL} & s = s_1, s_2, s_3 \end{cases}$$

oscillazioni di sapore $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_\beta$
oscillazioni attivi $\leftrightarrow$ sterili $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_s$

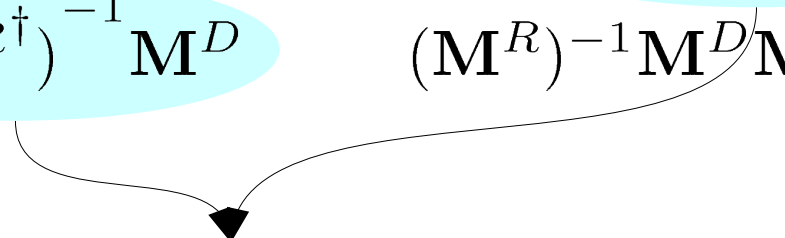
See-Saw per 3 famiglie

Consideriamo il caso del See-Saw: $\mathbf{M}^L = 0 \quad \lambda_i \{\mathbf{M}^R\} \gg \lambda_j \{\mathbf{M}^D\}$

La matrice di massa è diagonalizzata da $\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}$ con $\mathbf{U} = \mathbb{W} \mathbb{V}$

Prima $\mathbb{W}$ diagonalizza $\mathbf{M}$ a blocchi, poi $\mathbb{V}$ diagonalizza i blocchi ottenuti

$$\mathbb{W}^T \mathbf{M} \mathbb{W} \simeq \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\text{light}} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{\text{heavy}} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{light}} &= -(\mathbf{M}^D)^T (\mathbf{M}^R)^{-1} \mathbf{M}^D \\ \mathbf{M}_{\text{heavy}} &= \mathbf{M}^R \end{aligned}$$

$$\mathbb{W} = 1 - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{D\dagger} (\mathbf{M}^R (\mathbf{M}^{R\dagger})^{-1} \mathbf{M}^D & 2\mathbf{M}^{D\dagger} (\mathbf{M}^{R\dagger})^{-1} \\ -2(\mathbf{M}^{R\dagger})^{-1} \mathbf{M}^D & (\mathbf{M}^R)^{-1} \mathbf{M}^D \mathbf{M}^{D\dagger} \mathbf{M}^{R\dagger -1} \end{pmatrix}$$


I 3 neutrini leggeri sono disaccoppiati da quelli pesanti
Le oscillazioni attivi $\leftrightarrow$ sterili sono trascurabili

Origine della matrice di mixing

Abbiamo visto come la matrice di massa See-Saw è diagonalizzata a blocchi da:

$$U^T M U \quad U = W V \quad W^T M W \simeq \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\text{light}} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{\text{heavy}} \end{pmatrix}$$

W, V unitarie

I blocchi sono ulteriormente diagonalizzati da

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \mathbf{V} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{M}_{\text{light}} \mathbf{U} &= \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \\ \mathbf{V}^T \mathbf{M}_{\text{heavy}} \mathbf{V} &= \text{diag}(M_{R1}, M_{R2}, M_{R3}) \end{aligned}$$

La fenomenologia del mixing dei neutrini attivi è descritta dalla matrice $\mathbf{U}$

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1,3} \mathbf{U}_{\alpha k} \nu_{k L} \quad \alpha = e, \mu, \tau$$

Conteggio dei parametri della matrice di mixing

$$J_\mu^{NC} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma_\mu \nu_{\alpha L} = 2 \sum_{k=1,3} \bar{\nu}_{k L} \gamma_\mu \nu_{k L} \quad \text{NC è diagonale}$$

$$J_\mu^{CC} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{l}_{\alpha L} \gamma_\mu \nu_{\alpha L} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1,3} \bar{l}_{\alpha L} \gamma_\mu U_{\alpha k} \nu_{k L}$$

$\mathbf{U}$ matrice 3x3 $2N^2 = N^2$ angoli + N^2 fasi 9 angoli + 9 fasi

$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{1}$ $N^2 = N(N-1)/2$ angoli + $N(N+1)/2$ fasi 3 angoli + 6 fasi

$l_\alpha \rightarrow e^{i\phi_\alpha} l_\alpha$ - N fasi 3 angoli + 3 fasi

$\nu_\alpha \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \nu_\alpha$ (Dirac) - $(N-1)$ fasi 3 angoli + 1 fase

Angoli	Fasi di Dirac	Fasi di Majorana
$N(N-1)/2$	$(N-1)(N-2)/2$	$(N-1)$

$N=3$

3

1

2

Parametrizzazione della matrice di mixing

$$U = R_{23} R_{13}^C R_{12} D(\phi_2, \phi_3)$$

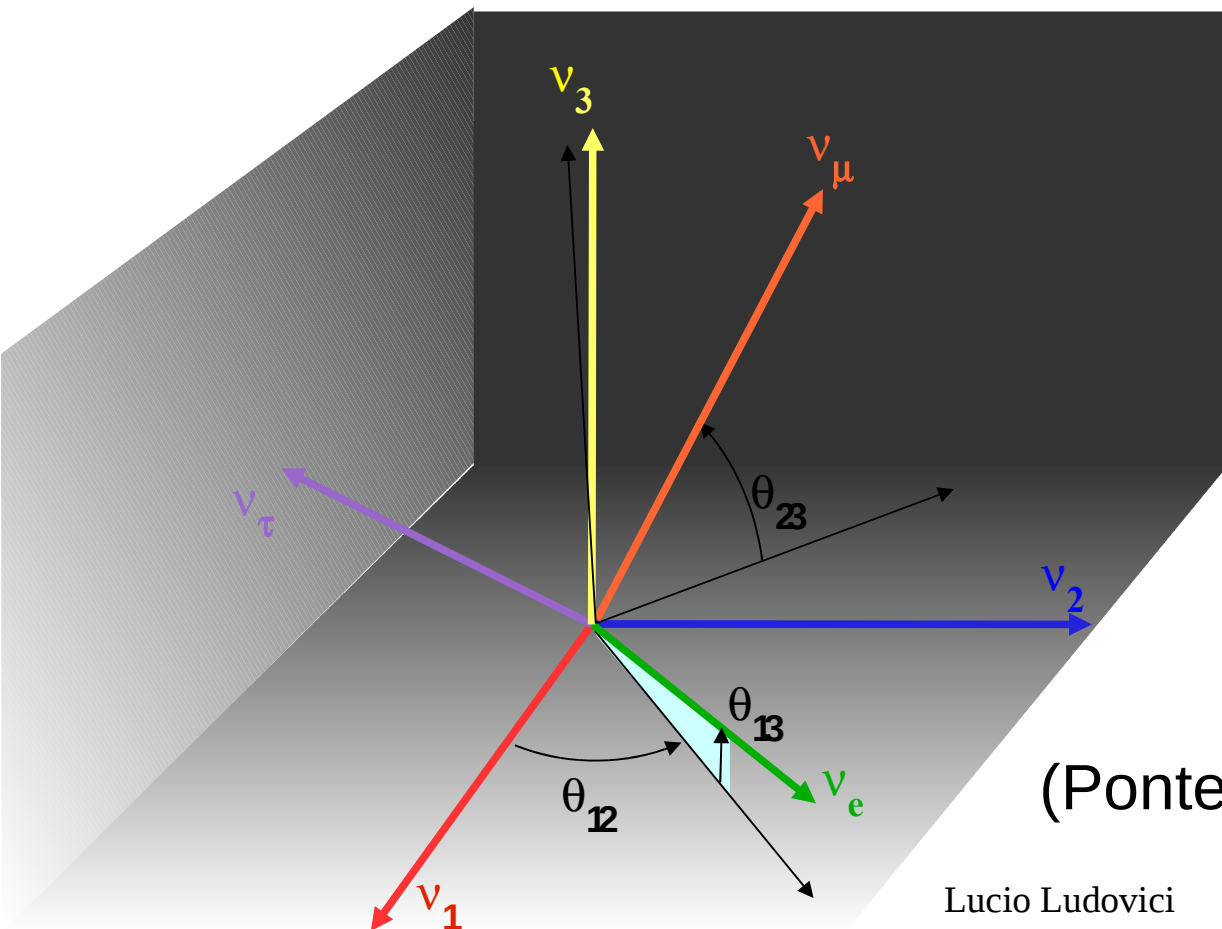
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & e^{-i\delta} s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -e^{i\delta} s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_3} \end{pmatrix}$$

atmosferici

“terra incognita”

solari

$\Delta L=2$



Matrice PMNS
(Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata)