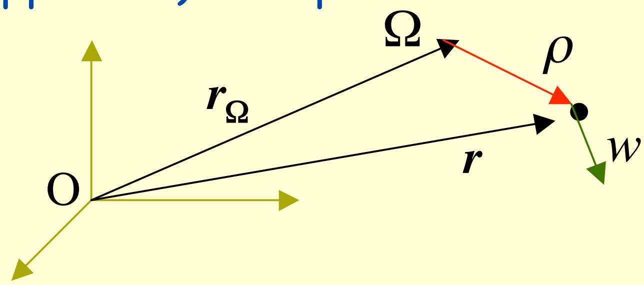
momento angolare

- Momento di un vettore (applicato) w rispetto ad un polo Ω:

  $\vec{\rho} \wedge \vec{w}$



- momento di una forza

  $\vec{m}_\Omega = \vec{\rho} \wedge \vec{f}$

- momento della quantità di moto (**momento angolare**)

  $\vec{p}_\Omega = \vec{\rho} \wedge \vec{q}$

- Teorema del momento angolare:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

$$\vec{\rho} \wedge \vec{f} = \vec{\rho} \wedge \frac{d\vec{q}}{dt}$$

$$\vec{m}_\Omega = \vec{\rho} \wedge \frac{d\vec{q}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} \wedge \vec{q} + \vec{\rho} \wedge \frac{d\vec{q}}{dt}$$

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_\Omega$$

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_\Omega$$

$$\frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} = \cancel{\vec{v} \wedge \vec{q}} - \vec{v}_\Omega \wedge \vec{q} + \vec{\rho} \wedge \frac{d\vec{q}}{dt}$$

$$\vec{\rho} \wedge \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} + \vec{v}_\Omega \wedge \vec{q}$$

per cui possiamo scrivere $\boxed{\vec{m}_\Omega = \frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} + \vec{v}_\Omega \wedge \vec{q}}$

- Se il polo è fermo, $\vec{v}_\Omega = 0$

e quindi $\boxed{\vec{m} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$

analogo a $\boxed{\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt}}$

- Nel moto circolare uniforme il momento angolare

  $\vec{p} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr^2\vec{\omega}$

  è costante in direzione e modulo (f centripeta)

forze centrali

- Per una forza centrale, ossia sempre rivolta verso un punto fisso (che possiamo scegliere coincidente con il polo) $\vec{m}_\Omega = \vec{r} \wedge \vec{f} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$

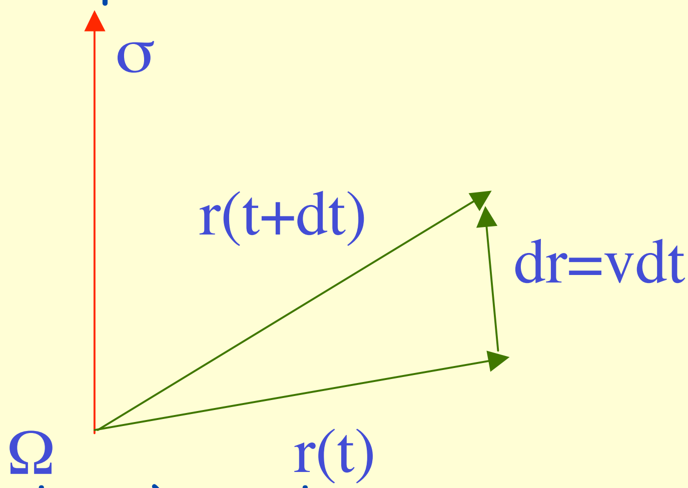
e quindi **il momento angolare si conserva**

- $\mathbf{p}$ definisce il piano di $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$. Se $\mathbf{p} = \mathrm{cost}$, il piano rimane sempre lo stesso: **moto piano**
- **velocità areolare**: area spazzata dal raggio vettore nell'unità di tempo

$$dA = \frac{|\vec{r} \wedge d\vec{r}|}{2} = \frac{|\vec{r} \wedge \vec{v}|dt}{2}$$

$$\sigma = \frac{dA}{dt} = \frac{p}{2m}$$

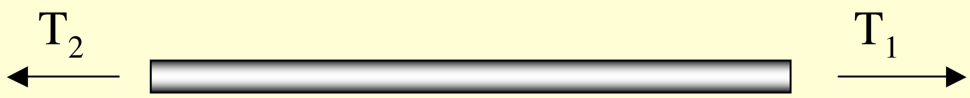
$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{p}}{2m}$$



in un moto centrale la velocità areolare si conserva

tensione dei fili

- **Filo privo di massa**



$$\vec{f} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m_f \vec{a} = 0$$

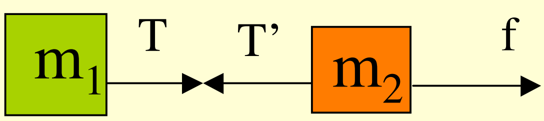
$$\Rightarrow \vec{T}_1 = -\vec{T}_2$$ **(secondo principio)**

il filo trasmette la forza da un capo all'altro:

$$\vec{f} = -\vec{T}' = \vec{T} = m\vec{a}$$

(terzo principio)

- **due masse connesse da fili (inestensibili)**



$$\vec{T} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{f} + \vec{T}' = m_2 \vec{a}_2$$

le due masse hanno la stessa accelerazione, per cui sommando membro a membro e tenendo conto che $T=-T'$ si ha:

$$f = (m_1 + m_2)a$$

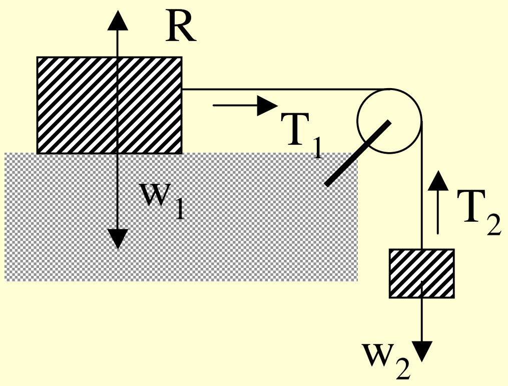
$$a = \frac{f}{(m_1 + m_2)}$$

$$T = f - m_2 a = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} f < f$$

carrucole

- carrucola (priva di attrito, di massa trascurabile)

macchina semplice, che cambia la direzione della forza



usiamo un' ascissa curvilinea s lungo il filo, e definiamo $a = \ddot{s}$

$w_2 = m_2 g, \quad T_2 = -T_1$

$f = ma$ su 1: $T_1 = m_1 a$

$f = ma$ su 2: $m_2 g + T_2 = m_2 g - T_1 = m_2 a$

sostituendo

$$m_2 g - m_1 a = m_2 a$$

$$m_2 g = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$$

La forza-peso è dovuta alla sola massa m_2

Tramite la fune e la carrucola, l'azione del peso è trasmessa anche alla massa m_1.

L'accelerazione complessiva a è minore di g, perché la forza peso dovuta ad m_2 agisce sulla somma delle masse $m_1 + m_2$