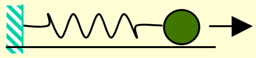
molle e moto armonico

molla ideale: molla di massa trascurabile, per la quale vale la **legge di Hooke**: $\vec{f} = -k\vec{x} = -k(\ell - \ell_0)\hat{x}$

dove $x=l-l_0$ rappresenta la variazione di lunghezza della molla rispetto alla lunghezza a riposo.

La forza è esercitata da entrambi gli estremi della molla: se un estremo è vincolato, la forza da esso esercitata sul vincolo non gioca alcun ruolo, ma è sempre presente.



Applicando il secondo principio ad una massa soggetta alla forza della molla si ha $f = ma \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

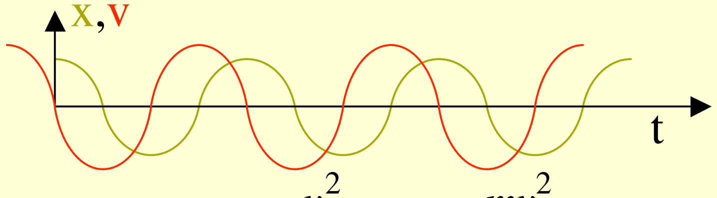
che ha per soluzione un moto armonico, ossia una qualunque funzione sinusoidale, per esempio

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \text{ con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ossia un'oscillazione di ampiezza A. Se contiamo i tempi dal massimo dell'oscillazione, deve essere $\varphi_0 = 0$

La velocità è data da $v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$

e risulta quindi in ritardo di fase di $\pi/2$



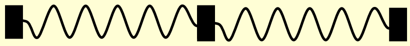
abbiamo poi $x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = x^2 + \frac{mv^2}{k} = A^2$

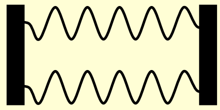
Le costanti di integrazione sono quindi legate alle condizioni iniziali da:

$$A = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2} = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k} + x_0^2}, \quad \tan\varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

se $v_0 = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ e $x_0 = A$, mentre se $x_0 = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$ e $v_0 = \frac{A}{\omega}$

legge di Hooke e forze elastiche





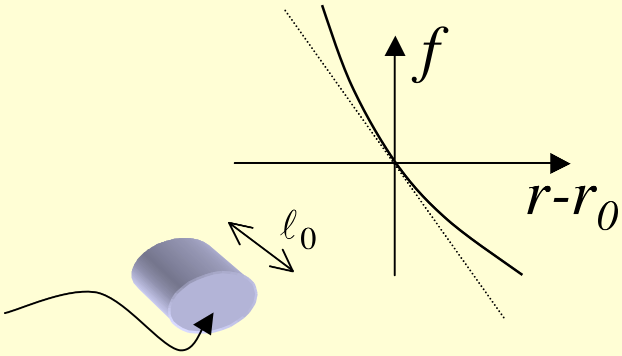
- se deformiamo due **molle "in serie"** otteniamo la stessa forza con uno spostamento doppio, per cui $k_{tot} = k/2$
- se deformiamo due **molle "in parallelo"** otteniamo una forza doppia con lo stesso spostamento, per cui $k_{tot} = 2k$

Il comportamento delle molle è il comportamento tipico dei **materiali elastici**, ed ha origini microscopiche:

se un corpo non è sollecitato ogni molecola si trova in equilibrio sotto l'azione complessiva delle molecole circostanti, che esercitano una **forza di richiamo**, ossia una forza che cambia segno passando per la posizione di equilibrio

sviluppando in serie si ha

$$f(r) \approx \left.\frac{df}{dr}\right|_{r_0} (r - r_0) = -C(r - r_0)$$



Forza totale esercitata da una sezione di superficie A contenente nA molecole
(n numero di molecole per unità di superficie)

$$T = -CnA(r - r_0)$$

mentre per l'allungamento complessivo $\frac{x}{\ell_0} = \frac{r - r_0}{r_0}$

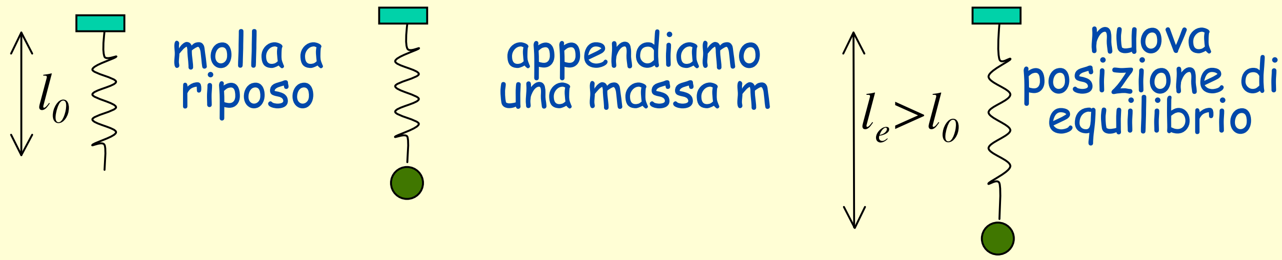
per cui $T = -\frac{Cr_0 nA}{\ell_0} x = -\frac{YA}{\ell_0} x = -kx$

dove Y (**modulo di Young**, N/m^2) dipende dal materiale

- Limiti alla validità della legge di Hooke: limite di elasticità, carico di rottura

nylon 0.4 10^{10} N/m^2
acciaio 22 10^{10} N/m^2

molle verticali e forza peso



- per l'equilibrio deve essere $mg - k(l_e - l_0) = 0$, $k(l_e - l_0) = mg$
- per posizioni diverse dall'equilibrio, sulla massa agirà la forza peso mg e la forza della molla $-k(l-l_0)$:

$$f = mg - k(l - l_0) = k(l_e - l_0) - k(l - l_0) = -k(l - l_e)$$

L'effetto della forza peso è quindi esclusivamente quello di spostare la posizione di equilibrio: è come se il corpo fosse soggetto solo ad una molla con la stessa costante elastica ma di lunghezza a riposo l_e.

La legge del moto rimane dunque la stessa $-kx = m\ddot{x}$ sia per molle orizzontali che per molle verticali.

x rappresenta lo spostamento dalla posizione di equilibrio, l_0 per molle orizzontali, l_e per molle verticali