oscillatore smorzato

- Aggiungiamo la resistenza del mezzo all'equazione dell'oscillatore: $-\beta v - kx = ma \Rightarrow m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$

equazione differenziale omogenea, soluzione

$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ con λ_1, λ_2 radici di $m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2m}\left(-\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4mk}\right)$$

eq. caratteristica

- Quando $\beta^2 - 4mk < 0$

λ complesse $x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) = Ae^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi)$

$$\omega = \frac{\sqrt{-\beta^2 + 4mk}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

moto sottosmorzato, pseudoperiodico (la posizione si annulla a intervalli costanti) con ω tanto più prossimo alla frequenza propria dell'oscillatore non smorzato quanto più piccolo è lo smorzamento β.

- Quando $\beta^2 - 4mk > 0$

λ reali e negative, **moto sovrasmorzato**

C_1 e C_2 determinati dalle condizioni iniziali:

$x(0) = C_1 + C_2$

$v(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$

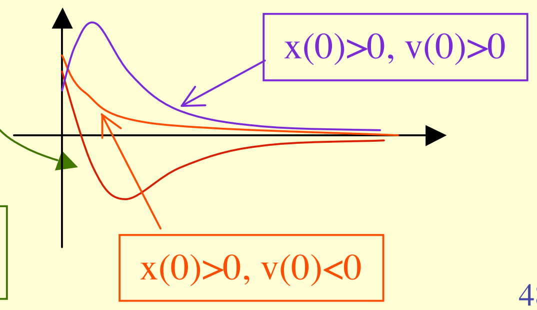
(possono essere positivi o negativi)

- **Smorzamento critico**, quando $\beta^2 - 4mk = 0$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{\beta}{2m}t}$$

passa per x=0 se $C_1C_2<0$

lo smorzamento critico è sempre il più rapido



soluzione del caso sottosmorzato con la rappresentazione complessa delle variabili sinusoidali (programma di Complementi)

Ricaviamo con tutti i passaggi il fattore cosinusoidale del moto smorzato:

$$f(t) = \left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)$$

$$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$$ formula di Eulero

$$f(t) = (C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t$$

perché $f(t)$ sia reale, (C_1+C_2) deve essere reale e $(C_1 - C_2)$ immaginario, il che significa che C_1 e C_2 devono essere complessi coniugati.

Ponendo $C_{1,2} = a \pm ib$

con $a = \frac{1}{2}A\cos\varphi$

$b = \frac{1}{2}A\sin\varphi$

si ha infine

$$f(t) = 2a\cos\omega t - 2b\sin\omega t = A(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

si noti che le formule di prostaferesi si ottengono facilmente dalla formula di Eulero

$$\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi) = e^{i(\omega t + \varphi)} = e^{i\omega t}e^{i\varphi} =$$

$$= \left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right)\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) =$$

$$= \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi + i\left(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi\right)$$

uguagliando le parti reali e le parti complesse