richiami sui differenziali

Date due funzioni di una sola variabile x $f(x), F(x)$

che siano una la derivata dell'altra $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

per definizione di integrale si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF(x)}{dx} dx = F(x_2) - F(x_1)$$

per esempio, $y(x) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 1$

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$$

se definiamo **differenziale di una funzione** la quantità $dF = \frac{dF(x)}{dx} dx$ allora possiamo scrivere

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF(x)}{dx} dx = \int_{F(x_1)=F_1}^{F(x_2)=F_2} dF = F_2 - F_1$$

(che equivale ad un cambiamento della variabile di integrazione da x a F)

Consideriamo ora una **funzione V di più variabili**, per es. x,y,z $V(x,y,z)$

introducendo le **derivate parziali** $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dx} V(x,y,z)\Big|_{y=\text{cost}, z=\text{cost}}$

possiamo costruire il **differenziale totale** della funzione V

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Se integriamo su un percorso che va dal punto A al punto B

$\vec{A} \equiv (x_A, y_A, z_A) \quad \vec{B} \equiv (x_B, y_B, z_B)$

abbiamo $\int_A^B dV = V_B - V_A$ per cui l'integrale dipende solo dal valore di V in A e B

campi di forze conservative

Per alcune forze, il lavoro $L = \int_A^B \delta L = \int_A^B (f_x dx + f_y dy + f_z dz)$ dipende solo dagli estremi del percorso.

In questo caso è possibile costruire una funzione della posizione, a cui daremo il nome di energia potenziale:

scegliamo un punto A per il quale fissiamo arbitrariamente il valore di V_A (p.es. $V_A = 0$)

Per un altro generico punto B fissiamo il valore di V_B univocamente ponendo

$$V_B(x, y, z) = V_A - \int_A^B \delta L$$

Possiamo scrivere $L = V_A - V_B$

L'energia potenziale è definita a meno di una costante

Notiamo anche che per una traiettoria chiusa $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$

Queste forze sono dette **conservative**, perché utilizzando il teorema delle forze vive abbiamo:

$$L = V_A - V_B = K_B - K_A \Rightarrow V_A + K_A = V_B + K_B$$

e possiamo dire che la somma di energia cinetica e potenziale si conserva

(**conservazione dell'energia meccanica**)

Tipicamente le forze conservative sono funzioni della posizione spaziale, o "**campi di forze**"

Viceversa, una forza $f(x,y,z,t)$ non è conservativa

campi di forze conservative

Analiticamente, la condizione perché una forza sia conservativa è che esista una funzione della posizione, $V(x,y,z)$, l'**energia potenziale**, per la quale $dV=-\delta L$, ossia

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

da cui

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$f_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{o, sinteticamente, } \vec{f} = -gradV(x,y,z)$$

$$f_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Un esempio di forza conservativa è la **forza peso**

$$\vec{f}\cdot d\vec{r} = -mgdz \;\Rightarrow\; L_{AB} = \int_A^B -mgdz = mgz_A - mgz_B$$

il lavoro dipende solo dalla quota iniziale e finale

l'energia potenziale è $V = mgz$

dovendosi conservare l'energia totale è

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = cost$$

se $v_i = 0 \;\Rightarrow v_f = \sqrt{2g(z_i - z_f)}$