complementi: considerazioni energetiche sull'oscillatore smorzato

$$x(t) = Ae^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

- se lo smorzamento è lento, possiamo assumere che l'energia meccanica totale sia data dall'energia potenziale quando $\cos(\omega t + \varphi) = 1$

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 \quad \text{con} \quad x_0 = Ae^{-\frac{\beta}{2m}t}$$

$$E(t) \cong \frac{1}{2}kA^2 e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\beta}{m}E(t)$$ potenza dissipata

in un periodo: $\Delta E = \frac{dE}{dt}T = -\frac{\beta}{m}TE(t) = -2\pi\frac{\beta}{\omega m}E(t)$

per quantificare la dissipazione di energia, si introduce il fattore di merito Q, tanto maggiore quanto minore è la frazione di energia dissipata in un periodo

$$Q = \frac{\omega m}{\beta} = 2\pi\frac{E_{immagazzinata}}{E_{dissipata\ in\ un periodo}}$$

oscillatore forzato

- Che succede se l'oscillatore è soggetto ad una forza esterna dipendente dal tempo? $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t)$

  Se la forza è sinusoidale → $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F\cos\Omega t$

  che può essere considerata $\Re(m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx) = \Re\left(Fe^{i\Omega t}\right)$

- Soluzione generale: Sol. omogenea + soluzione particolare

Sol. dell'omogenea → oscillazione smorzata:

fase transitoria, a tempi lunghi scompare

Cerchiamo una soluzione particolare della forma $Ae^{i\omega t}$

deve essere per ogni t $\left(-m\omega^2 + i\beta\omega + k\right)Ae^{i\omega t} = Fe^{i\Omega t} \Rightarrow \omega = \Omega$

e $A = \dfrac{F}{-m\Omega^2 + i\beta\Omega + k} = \dfrac{F}{Z}$ con Z coefficiente complesso

$$\Re(Z) = k - m\Omega^2, \quad \Im(Z) = \beta\Omega$$

$$|Z| = \sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \beta^2\Omega^2} = m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \beta^2\frac{\Omega^2}{m^2}} \qquad \text{con } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$Z = |Z|e^{i\varphi} \text{ con } \varphi = \arctan\left(\frac{\beta\Omega}{k - m\Omega^2}\right)$$

la soluzione a tempi lunghi è quindi in definitiva

$$x(t) = \Re\left(\frac{F}{|Z|}e^{i(\Omega t - \varphi)}\right) = \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \beta^2\dfrac{\Omega^2}{m^2}}}\cos(\Omega t - \varphi) =$$

$$= x_0\cos(\Omega t - \varphi)$$