



Complementi: la risonanza

$$x_0 = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \frac{\Omega^2}{m^2}}}$$

x_0 non dipende dalle condizioni iniziali

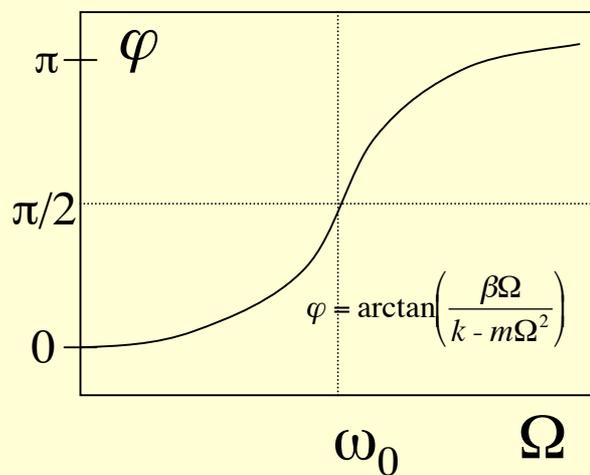
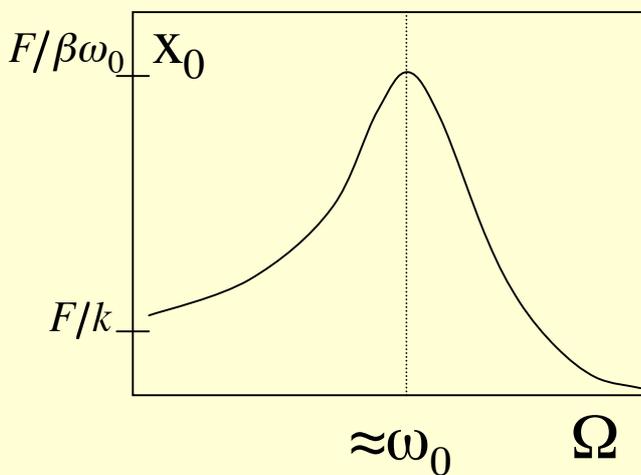
deriviamo per cercare massimi e minimi

$$\frac{d}{d\Omega} \left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \frac{\Omega^2}{m^2} \right) = 0$$

$$-2 \cdot 2(\omega_0^2 - \Omega^2)\Omega + 2\beta^2 \frac{\Omega}{m^2} = 0$$

$$\Omega = 0 \quad \text{minimo}$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2} \approx \omega_0^2 \quad \text{massimo}$$



- L'ampiezza delle oscillazioni è massima per $\Omega^2 \approx k/m$, quando il sistema è "in risonanza"
- per Ω piccoli $x_0 = F/k$ (molla senza oscillazioni)
- lo spostamento è sempre in ritardo rispetto all'eccitazione
- a bassa frequenza lo spostamento è (quasi) in fase
- alla risonanza lo sfasamento è di 90°
- ad alta frequenza lo spostamento è in opposizione di fase



Complementi: fattore di merito

- Energia immagazzinata: $E = \frac{1}{2} kx_0^2$

l'oscillatore assorbe tanta più energia quanto più lo stimolo ha una frequenza prossima alla risonanza
la larghezza della campana stabilisce la selettività dell'oscillatore (es. sintonizzazione di un segnale radio)

- Quantifichiamo la larghezza, calcolando la "larghezza a mezza altezza" dell'energia

immagazzinata
$$\frac{1}{2} kx_0^2 = \frac{1}{2} k \frac{F^2}{m^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \frac{\Omega^2}{m^2}}$$

che alla risonanza ($\omega_0 \approx \Omega$) vale

$$\frac{1}{2} kx_0^2 \approx \frac{1}{2} k \frac{F^2}{m^2} \frac{1}{\beta^2 \frac{\omega_0^2}{m^2}} = \frac{1}{2} k \frac{F^2}{\beta^2 \omega_0^2}$$

e si riduce di un fattore due quando

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 = \beta^2 \frac{\omega_0^2}{m^2}$$

$$((\omega_0 - \Omega)(\omega_0 + \Omega))^2 = \beta^2 \frac{\omega_0^2}{m^2}, \quad \text{e se } \omega_0 \approx \Omega$$

$$(\omega_0 - \Omega)^2 4\omega_0^2 = \beta^2 \frac{\omega_0^2}{m^2} \Rightarrow \pm(\omega_0 - \Omega) = \frac{\beta}{2m} \Rightarrow \Omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\beta}{2m}$$

$$\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\omega_0} = \frac{\beta}{\omega_0 m} = \frac{1}{Q}$$

ritroviamo il fattore di merito dell'oscillatore smorzato



complementi: scambi di energia con gli oscillatori

Maggiore è Q (minore lo smorzamento) tanto più selettivo è l'oscillatore

- cosa succede se $\beta \rightarrow 0, Q \rightarrow \infty$?

l'oscillatore non può scambiare energia con lo stimolo esterno: se la frequenza è diversa, la risposta è assente, se la frequenza è uguale, l'energia tende ad infinito, raggiungendo sicuramente il carico di rottura dell'oscillatore

Notiamo che la maggior parte degli scambi di energia naturali ed artificiali si basa su onde (oscillazioni) e risonanza:

- la radiazione eccita atomi e molecole intorno alla posizione di equilibrio
- l'emissione e la ricezione del suono (naturale ed artificiale) si basa su meccanismi di oscillazione
- la trasmissione e la ricezione di radiosegnali avviene tramite oscillazioni elettriche regolate dalle stesse leggi degli oscillatori meccanici

Ruolo della dissipazione negli scambi di energia!

senza dissipazione (attrito o altre forme) non sarebbe possibile lo scambio di segnali, ma neanche il trasferimento di energia dal sole alla terra attraverso la radiazione luminosa