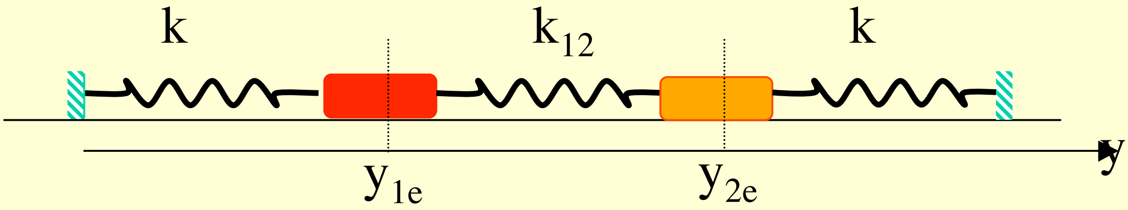
complementi: oscillatori accoppiati



Indichiamo con y_1 e y_2 le posizioni dei due oscillatori lungo l'asse y e con $x_1 = y_1 - y_{1e}$ e $x_2 = y_2 - y_{2e}$ gli spostamenti dei due oscillatori rispetto alle posizioni di equilibrio.

La quantità $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 - (y_{2e} - y_{1e})$ rappresenta col suo segno l'allungamento della molla centrale.

Le equazioni del moto per i due oscillatori sono:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{cases}$$

sommando e sottraendo le due equazioni si ottengono due equazioni differenziali nelle variabili $(x_2\text{-}x_1)$ e $(x_2\text{+}x_1)$:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - 2k_{12}(x_2 - x_1) \\ m\dfrac{d^2(x_2 + x_1)}{dt^2} = -k(x_2 + x_1) \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} x_2 + x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) & \omega_0 = \sqrt{k/m} \\ x_2 - x_1 = \bar{x}\sin(\omega t + \varphi) & \omega = \sqrt{(k + 2k_{1,2})/m} \end{cases}$$

complementi: modi normali degli oscillatori accoppiati

Cosa rappresentano le variabili (x_2-x_1) e (x_2+x_1) ?

Se $\bar{x}=0$, $x_2-x_1=0$ per tutto il moto. Ma $x_2-x_1=0$ vuol dire che la molla centrale è sempre alla lunghezza di equilibrio, e la distanza tra i due oscillatori non cambia mai durante il moto:

- I due oscillatori si spostano **in fase** tra loro.

Se $x_0=0$, $x_2+x_1=0$ per tutto il moto. Ma $x_2+x_1=0$ vuol dire che per tutto il moto gli spostamenti dei due oscillatori sono uguali ed opposti :

- I due oscillatori si spostano in **opposizione di fase**

I due modi di vibrazione in fase ed in opposizione di fase possono essere entrambi mantenuti dal sistema dei due oscillatori ("**modi normali**")

Per ricavare le leggi orarie dei due oscillatori, possiamo sommare e sottrarre nuovamente le due equazioni:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}\left[x_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)+\bar{x}\sin(\omega t+\bar{\varphi})\right] \\ x_1 = \frac{1}{2}\left[x_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)-\bar{x}\sin(\omega t+\bar{\varphi})\right] \end{cases}$$

ponendo $\bar{x}=0$ o $x_0=0$ si vede che in effetti i due modi normali corrispondono a due oscillazioni perfettamente sinusoidali in fase ed in opposizione di fase tra loro

complementi: frequenza portante e modulante

Se si pone $x_0 = \bar{x}$ e $\varphi_0 = \bar{\varphi} = 0$

e si introducono le due frequenze date dalla semisomma (ossia la media) e dalla semidifferenza delle frequenze dei due modi normali:

$$\omega_p = \frac{\omega + \omega_0}{2} \qquad \omega_m = \frac{\omega - \omega_0}{2}$$

le leggi orarie si possono riscrivere utilizzando le formule di prostaferesi,

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos(\omega_m t)\sin(\omega_p t) \\ x_2 = x_0 \sin(\omega_m t)\cos(\omega_p t) \end{cases}$$

che mettono in luce come i due oscillatori oscillano con legge sinusoidale di frequenza pari alla media, detta **frequenza portante**, modulata con una sinusoide di frequenza minore (ossia di periodo più lungo), detta **frequenza modulante.**

Il moto più generale non è quindi armonico. Gli unici moti armonici sono quelli dei modi normali.

Il periodo modulante sarà tanto più lungo quanto più vicine sono le frequenze dei due modi normali (tanto minore è l'accoppiamento k_{12})