# descrizione del movimento

La conoscenza dell'evoluzione della posizione in funzione del tempo può essere espressa attraverso le "**leggi orarie**":

$$x = x(t) \qquad r = r(t)$$
$$y = y(t) \quad \text{o} \quad \vartheta = \vartheta(t)$$
$$z = z(t) \qquad \varphi = \varphi(t)$$

che possono esprimersi in un'unica relazione vettoriale:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Le leggi orarie possono essere considerate come le rappresentazioni parametriche di una curva geometrica, la **traiettoria**

alternativamente, introducendo come parametro l'**ascissa curvilinea s** lungo la traiettoria, la descrizione del moto può essere data da:

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad \text{con} \quad s = s(t)$$

detta talvolta **rappresentazione intrinseca** della traiettoria

$s = s(t)$ è l'espressione scalare della legge oraria.

sostituendo in $r(s)$ si riottiene l'espressione vettoriale della legge oraria, $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$

# velocità (1)

verso una definizione operativa della velocità:

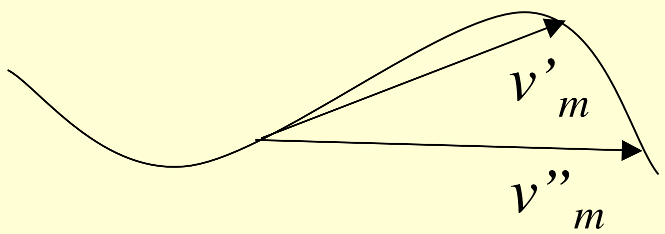
- ha velocità maggiore il punto materiale che, in uno stesso tempo, percorre una distanza maggiore.

se teniamo conto che gli spostamenti sono quantità vettoriali, possiamo pensare di definire un **vettore velocità** come il rapporto tra lo spostamento ed il tempo impiegato a percorrerlo

conoscendo la legge oraria, possiamo definire la **velocità media** tra due posizioni:

$$\vec{v}_m = \vec{v}_m(t_1, t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

la velocità media è definita a partire da due tempi diversi, e non è dunque univoca per ogni punto della traiettoria:




facendo tendere $\Delta t$ a zero, si può definire una **velocità istantanea**, funzione di un unico valore del tempo $t$:

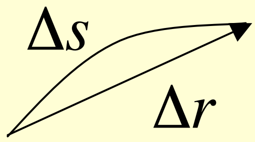
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

rappresentazione cartesiana della velocità

# velocità (2)

In termini di ascissa curvilinea $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt}$

Si noti che, passando al limite di spostamento infinitesimo,




$$\left|d\vec{r}\right| = ds, \text{ e quindi } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_t$$

in cui $\hat{u}_t$ è un versore, tangente alla traiettoria.

$\dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$ è il modulo della velocità (con segno) o velocità scalare

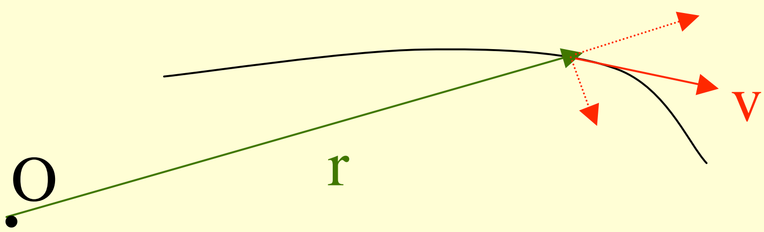
Dimensioni della velocità: $[v] = [lt^{-1}]$, si misura in **m/s**

Le precedenti relazioni possono essere invertite, permettendo di calcolare lo spostamento infinitesimo a partire dalla conoscenza della velocità istantanea:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \qquad ds = vdt$$

Scomposizione nelle componenti radiale e ortogonale

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$




nel moto circolare piano con l'origine delle coordinate O nel centro della circonferenza ,

$r = \text{cost}, \ \Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ con $\omega$ ortogonale al piano, $v$ tangente alla circonferenza, e $\omega = \dfrac{v}{r}$

$r$, $v$ ed $\omega$ formano una terna ortogonale

# accelerazione

In maniera analoga si introduce la variazione della velocità, o **accelerazione:**

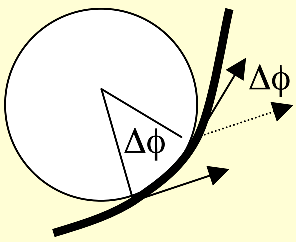
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$ vettore, [a]= [lt$^{-2}$], si misura in **m/s$^2$**

Ricordando l'espressione generale della derivata di un vettore:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\hat{u}_t\right) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \vec{\omega}' \wedge \vec{v}$$

in cui $\omega'$ è ora la velocità angolare con cui ruota su se stesso il versore della velocità, non necessariamente uguale alla velocità di rotazione di **r** che entra nella velocità.

$\omega'$ e $\omega$ coincidono per un moto circolare con l'origine delle coordinate nel centro.




Riferendosi al **cerchio osculatore**, ossia alla circonferenza tangente alla traiettoria nel punto dato, $\omega'$ è allora uguale a $\omega$, velocità istantanea di rotazione del raggio $\rho$ del cerchio osculatore, per cui

$$\omega = \frac{v}{\rho}$$

L'accelerazione si scompone quindi in una componente tangenziale, legata alla variazione della velocità scalare e una componente normale alla traiettoria

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n$$

con $$a_t = \dot{v} = \ddot{s} \qquad a_n = v\omega = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2\rho$$