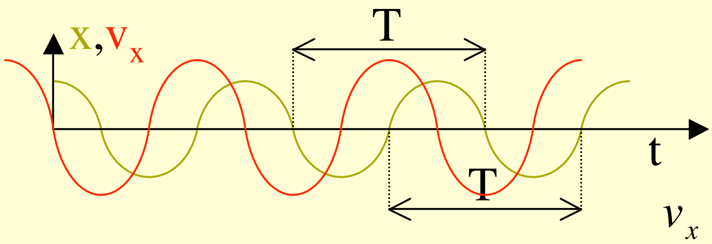
moto circolare e moto armonico

Le due proiezioni del punto sugli assi x ed y si muovono di **moto armonico**:

$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t$$

Il modulo della velocità angolare è uguale alla **pulsazione** del moto armonico, legata al **periodo** dalla relazione $T = 2\pi / \omega$, e alla **frequenza** $\nu = 1/T = \omega / 2\pi$



$$v_x = -\omega R\sin\omega t = \omega R\cos\left(\omega t - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

v_x è **sfasata** (ritardata) di 90° o di $\pi/2$ rispetto ad x

dimensioni: $[\omega] = [\nu] = [t^{-1}]$

Proiettiamo anche l'accelerazione su uno dei due assi:

- l'accelerazione è proporzionale ad $-x$ $\qquad \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$
- il moto che ne risulta è armonico

In tutti i casi in cui $a \propto -x$ il moto è armonico

Vedremo in seguito molti esempi di moto armonico:

il moto di una massa appesa ad una molla

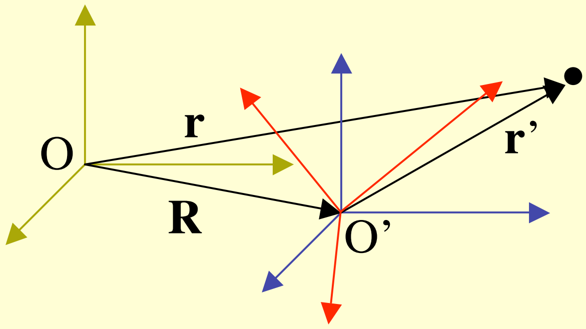
il moto di una massa appesa ad un filo (pendolo) in prima approssimazione è anch'esso armonico

In questi casi la pulsazione ω non corrisponde però a nessuna velocità angolare.

cinematica dei moti relativi

Come si trasformano le leggi del moto in sistemi di riferimento diversi?

N.B. le posizioni sono vettori applicati nell'origine del sistema di coordinate



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$$

in particolare in sistemi di riferimento in moto (traslatorio e/o rotatorio) uno rispetto all'altro?

- Per una semplice traslazione $\vec{R} = \vec{R}(t), \hat{i}' = \hat{i}, \hat{j}' = \hat{j}, \hat{k}' = \hat{k}$
- Se c'è anche rotazione $\hat{i}'(t) \neq \hat{i}, \hat{j}'(t) \neq \hat{j}, \hat{k}'(t) \neq \hat{k}$

moti relativi
caso generale (FMU 3.19 e 3.24)

consideriamo un vettore **w'** nel secondo riferimento in moto rototraslatorio rispetto al primo:

$$\vec{w}(t) \equiv \vec{w}'(t) = w'_x(t)\hat{i}'(t) + w'_y(t)\hat{j}'(t) + w_z'(t)\hat{k}'(t)$$

se deriviamo rispetto al tempo **nel primo sistema di riferimento** dobbiamo tener conto anche della variazione dei versori:

$$\left(\frac{d\vec{w}(t)}{dt}\right)_S = \frac{dw'_x(t)}{dt}\hat{i}' + \frac{dw'_y(t)}{dt}\hat{j}' + \frac{dw'_z(t)}{dt}\hat{k}' + w'_x(t)\frac{d\hat{i}'}{dt} + w'_y(t)\frac{d\hat{j}'}{dt} + w_z'(t)\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

i primi tre termini rappresentano la derivata di *w'* nel secondo riferimento,

gli ultimi tre contengono le derivate dei versori, che si possono esprimere con tre **relazioni di Poisson** in cui compare la **stessa** velocità angolare ω (come è dimostrato in FMU 3.28),

$$w'_x\frac{d\hat{i}'}{dt} + w'_y\frac{d\hat{j}'}{dt} + w_z'\frac{d\hat{k}'}{dt} =$$

$$= w'_x\vec{\omega}\wedge\hat{i}' + w'_y\vec{\omega}\wedge\hat{j}' + w_z'\vec{\omega}\wedge\hat{k}' =$$

$$= \vec{\omega}\wedge\left(w'_x\hat{i}' + w'_y\hat{j}' + w_z'\hat{k}'\right)$$

per cui in definitiva si ha:

$$\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{w}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}\wedge\vec{w}'$$

trasformazione della velocità

Consideriamo la relazione $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$

Se deriviamo entrambi i membri rispetto al tempo nel sistema di riferimento S, dobbiamo applicare a **r'** la formula

$$\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{w}\,'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \wedge \vec{w}\,'$$

per cui otteniamo:

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_S$$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}\,'$$

dove

- **v'**(t) è la velocità del punto **nel secondo riferimento S'**
- **V**(t) è la velocità **nel primo riferimento** S dell'origine O' del secondo riferimento S'

la somma $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{V}(t) + \omega(t) \wedge \mathbf{r}'(t)$ è detta **velocità di trascinamento**, poiché rappresenta la velocità che avrebbe in S un punto fermo in S', **trascinato** dal moto di S'

Si noti che si è assunto implicitamente che il tempo e la lunghezza non dipendano dal sistema di riferimento, ossia siano **assoluti**.