Meccanica dei sistemi

- Dinamica di sistemi che non possono essere schematizzati come punti materiali
- in realtà sappiamo che la materia è costituita di oggetti microscopici, per i quali la schematizzazione di punto materiale sembrerebbe appropriata
- perché non possiamo semplicemente estendere la dinamica del punto a più punti materiali?
- in pochi grammi di materia è contenuto un numero di punti dell'ordine del numero di Avogadro

Dovremo quindi introdurre quantità globali del sistema, ottenute sommando su tutti i punti del sistema, che permettano di rappresentarne lo stato di moto

- centro di massa
- quantità di moto totale
- momento angolare totale

e mettere in relazione queste quantità col sistema di forze a cui il sistema è soggetto

Sistemi discreti: somma su tutti i punti

Numero molto grande di punti → sistemi continui: integrale su tutto lo spazio occupato dal sistema

centro di massa

- definiamo il centro di massa di un sistema di n punti materiali, ciascuno di massa m_i

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$$

o, in coordinate cartesiane,

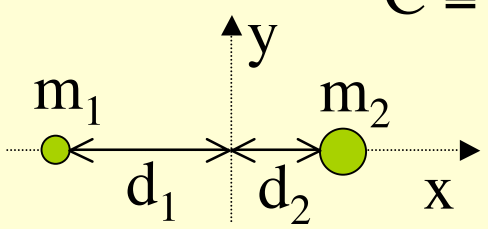
$$x_c = \frac{1}{M}\sum m_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{M}\sum m_i y_i, \quad z_c = \frac{1}{M}\sum m_i z_i,$$

- Il centro di massa gode della proprietà distributiva:

$$\vec{r}_{c_1+c_2} = \frac{M_1\vec{r}_{c_1} + M_2\vec{r}_{c_2}}{M_1 + M_2}$$

- Il centro di massa di due punti giace sulla congiungente, a distanza inversamente proporzionale dalle due masse:

$C \equiv O$



$$x_c = \frac{-m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -m_1 d_1 + m_2 d_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

- Il centro di massa di un sistema finito di punti si può costruire applicando la costruzione precedente a due punti, e aggiungendo via via un punto alla volta, utilizzando la proprietà distributiva

Sistemi continui

- Il centro di massa di un sistema continuo si può definire scomponendo il sistema in sottosistemi di dimensioni piccole rispetto al sistema completo, e passando al limite di sottosistemi infinitesimi:

$$\vec{r}_c \approx \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{1}{M} \sum \Delta m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_c = \frac{\int_V \vec{r}\, dm}{\int_V dm} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r}\, dm$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume V del sistema

- Se si introduce la densità $\rho = \frac{dm}{dV}$ l'integrale diventa

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho dV = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(x,y,z) dxdydz$$

$$x_c = \frac{1}{M} \int_V x\rho(x,y,z) dxdydz; \quad y_c = \frac{1}{M} \int_V y\rho dxdydz; \quad z_c = \frac{1}{M} \int_V z\rho dxdydz$$

e per densità uniforme $\quad \vec{r}_c = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{\int_V \vec{r} dV}{\int_V dV} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$

- per distribuzioni di massa superficiali o lineari, si possono introdurre analogamente le densità superficiali o lineari: $dm = \sigma dS, dm = \lambda dS$

  e l'integrale di volume sarà sostituito da un integrale di superficie o di linea

quantità di moto e c.d.m.

- definiamo la quantità di moto totale

$$\vec{Q} = \sum \vec{q}_i = \sum m_i \vec{v}_i$$

se deriviamo rispetto al tempo la posizione del c.d.m.

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{Q}}{M}$$

otteniamo il **primo teorema del c.d.m.** $\vec{Q} = M\vec{v}_c$

- Deriviamo **Q** e applichiamo il secondo principio

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \frac{d\vec{q}_i}{dt} = \sum \vec{f}_i$$

ora il principio di azione e reazione garantisce che nella sommatoria rimangono solo forze esercitate dall'esterno sui punti del sistema, essendo le forze interne a due a due uguali ed opposte.

Si ottiene così la **prima equazione (cardinale) della dinamica dei sistemi** $\vec{F}^e = \sum \vec{f}^e = \frac{d\vec{Q}}{dt}$

che può essere riscritta come $\vec{F}^e = \frac{d(M\vec{v}_c)}{dt} = M\vec{a}_c$

(**secondo teorema del c.d.m.**)

- il centro di massa di un sistema si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema, giustificazione a posteriori del concetto di punto materiale (esempi)
- **Per un sistema isolato, Q è costante**

  (esempi: rinculo, reazione…)