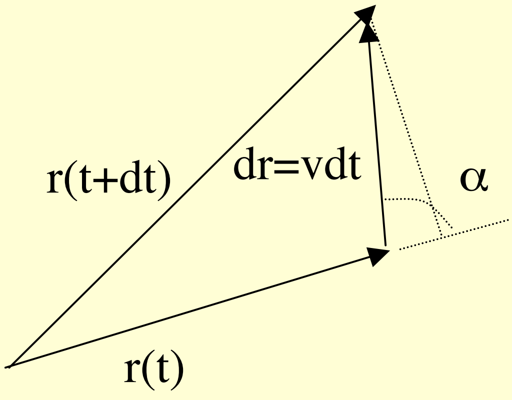
seconda e terza legge

- velocità areolare (FMU 4.12)

$$dA = \frac{1}{2} r dr \sin\alpha = \frac{|\vec{r} \wedge d\vec{r}|}{2} = \frac{|\vec{r} \wedge \vec{v}|}{2} dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{p}{2m}$$



ed essendo p costante

⇒ velocità areolare costante

Per orbite circolari, la terza legge è immediata:

$$f = ma$$

$$\Rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2} r$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

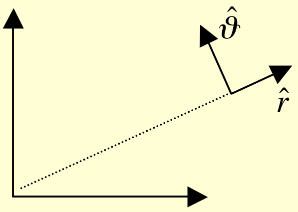
complementi: orbite ellittiche

L'equazione dell'ellisse si può derivare dal secondo principio della dinamica, usando la formula di Poisson per i versori delle coordinate polari

$$\frac{d\hat{\vartheta}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{\vartheta} = -\omega \hat{r}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} = G\frac{Mm}{r^2\omega}\frac{d\hat{\vartheta}}{dt} = G\frac{Mm^2}{p}\frac{d\hat{\vartheta}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v} - G\frac{Mm^2}{p}\hat{\vartheta}\right) = 0$$



La quantità in parentesi rappresenta quindi un vettore costante, che possiamo indicare come $\frac{p}{GMm}\vec{v} - \hat{\vartheta} = e\hat{j}$

Misuriamo gli angoli in modo che quando $\vartheta = 0, \hat{j} \cdot \hat{r} = 0$

e moltiplichiamo scalarmente per $\hat{\vartheta}$ l'eguaglianza tra vettori. Avremo: $\frac{p}{GMm}v_\vartheta - 1 = \frac{p}{GMm}r\omega - 1 = \frac{p^2}{rGMm^2} - 1 = e\cos\vartheta$

che risolta rispetto a $1/r$ è l'equazione di una conica di eccentricità e $\quad \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{p^2}(1 + e\cos\vartheta)$

che rappresenta un cerchio per e=0, una ellisse per $0<e<1$, una parabola per e=1 e una iperbole per e>1.

Si noti che per e>1 c'è un angolo limite superiore

In ogni caso, $\vartheta = 0$ corrisponde al perielio, $r_p = \frac{p^2}{GMm^2(1+e)}$

Energia totale e geometria dell'orbita

- Calcolando l'energia totale al perielio, si può ritrovare la corrispondenza tra segno dell'energia e natura delle orbite. Al perielio, $\dot{r} = 0$

  e il potenziale efficace coincide con l'energia totale

$$E = \frac{p^2}{2mr_p^2} - G\frac{Mm}{r_p} = \frac{G^2M^2m^3(1+e)^2}{2p^2} - \frac{G^2M^2m^3(1+e)}{p^2} = \frac{G^2M^2m^3}{2p^2}(e^2-1)$$

Ritroviamo così le relazioni tra forma dell'orbita, eccentricità e energia totale:

- orbita ellittica (chiusa) $e<1$ $E<0$
- orbita parabolica $e=1$ $E=0$
- orbita iperbolica $e>1$ $E>0$

Come si vede, l'eccentricità dipende dalle costanti del moto p ed E: $e = \sqrt{1 + \frac{2p^2E}{G^2M^2m^3}}$