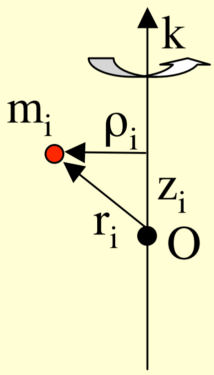
# rotazione attorno ad un asse fisso

- in questo caso conviene scegliere come origine comune del riferimento inerziale e del riferimento rotante un punto dell'asse, $(\Omega = O' = O, v_O = 0, r_O = 0)$
  per cui $\vec{v}_i = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{r}_i(t)$
- La quantità di moto del sistema è nulla se il c.d.m. è anch'esso sull'asse, altrimenti è necessaria una forza esterna (esercitata p.es. dai vincoli che tengono l'asse fisso) che mantiene il c.d.m. in rotazione.
- per il momento angolare si ha

$$
\begin{aligned}
\vec{P} &= \sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}_i \wedge m_i \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i\right) = \\
&= \sum \left(z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i\right) \wedge m_i \left[\vec{\omega} \wedge \left(z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i\right)\right] = \\
&= \sum \left(z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i\right) \wedge m_i \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}_i\right) = \\
&= \sum z_i m_i \hat{k} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}_i\right) + \sum m_i \rho_i^2 \vec{\omega} = \\
&= -\sum z_i m_i \omega \vec{\rho}_i + \sum m_i \rho_i^2 \vec{\omega} \\
&= \vec{P}_\perp + \vec{P}_{//}
\end{aligned}
$$




- La componente parallela di $P$ è: $\vec{P}_{//} = \sum m_i \rho_i^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega}$

dove $I$ dipende dalla distribuzione della massa rispetto all'asse (è lo stesso per qualunque scelta di O sull'asse), e prende il nome di **momento di inerzia** rispetto all'asse dato.

# momento d'inerzia

Proiettando la II equazione cardinale sull'asse fisso di rotazione con polo sull'asse si ha:

$$\vec{M}^e = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow M_k^e = \frac{d}{dt} I\omega = I\frac{d\omega}{dt}$$

Il momento d'inerzia svolge nella II eq. card. lo stesso ruolo della massa (inerziale) nella I (da cui il nome)

Per un sistema rigido rotante intorno ad un asse fisso la legge oraria si riduce a $\vartheta = \vartheta(t)$ che si ottiene per integrazione della II eq. cardinale $M_k^e = I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$

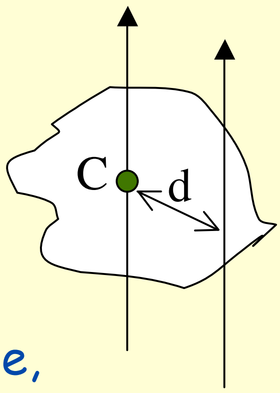
Per sistemi continui $I = \int \rho^2 dm$

esempi: disco o cilindro $I = \frac{1}{2}MR^2$

sfera $I = \frac{2}{5}MR^2$

teorema di Huygens-Steiner

$$I = I_C + Md^2$$




infatti, se si assume z diretto come l'asse, indicando con X,Y le coordinate rispetto al c.d.m. e con x,y le coordinate rispetto ad un'origine sul nuovo asse, e orientando x lungo la congiungente i due assi, abbiamo: $x_i = X_i + d; \quad y_i = Y_i; \quad z_i = Z_i$

e quindi

$$I = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = \sum m_i\left[\left(X_i + d\right)^2 + Y_i^2\right] =$$

$$= \sum m_i\left(X_i^2 + Y_i^2\right) + \sum m_i d^2 + 2d\sum m_i X_i =$$

$$= I_C + Md^2$$

# rotazione intorno ad un asse fisso (2)

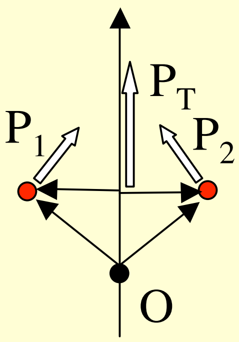
- La componente perpendicolare $\vec{P}_\perp = -\sum m_i z_i \omega \vec{\rho}_i$

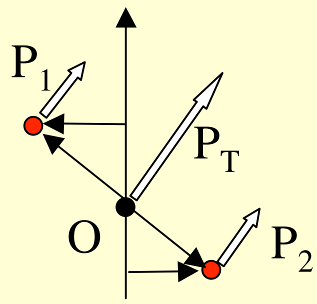
dipende invece dal polo tramite $z_i$ e si annulla se l'asse è un asse di simmetria (per ogni $\rho m$ esiste un $-\rho m$)

Si può dimostrare che per ogni polo esistono almeno tre assi ortogonali per rotazioni attorno ai quali $P_\perp$ è sempre nullo (**assi principali di inerzia**). Se il polo è nel c.d.m. questi tre assi sono detti **centrali.**

Poiché $P_\perp$ ruota insieme al corpo, $\boldsymbol{P}$ esegue un moto di **precessione** intorno all'asse.

Consideriamo due esempi con due soli punti:




La scomposizione $\vec{P} = I\vec{\omega} + \vec{P}_\perp$ fatta per un asse fisso vale anche per un polo posto sull'asse istantaneo di rotazione.

# assi di rotazione e simmetria del sistema

Abbiamo già detto che se il c.d.m. non si trova sull'asse di rotazione, i vincoli che incernierano l'asse devono fornire la forza esterna necessaria per il moto (circolare) del baricentro.

La eventuale rotazione del momento angolare, che compare nel caso l'asse non sia un asse principale di inerzia, richiede una componente del momento esterno perpendicolare all'asse di rotazione:

$$\vec{M}^e = \frac{d\vec{P}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{d\vec{P}_\perp}{dt}$$

Negli alberi rotanti è importante in pratica minimizzare questa componente, che solleciterebbe inutilmente i vincoli che li incernierano: tipica l'operazione di equilibratura delle gomme di un'automobile.

Notiamo infine che se l'asse coincide con un asse centrale di inerzia, trascurando gli attriti il moto di rotazione si può mantenere indefinitamente, senza intervento di forze esterne.