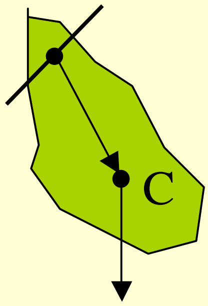
# pendolo fisico e pendolo di torsione

- **pendolo fisico, o composto**:

corpo rigido incernierato in un asse non baricentrico.

Proiettando la II eq. cardinale




$$\vec{M}^e = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow M_k^e = \frac{d}{dt} I\omega = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$(\vec{r}_c \wedge M\vec{g})_k = -Mgr_c \sin\vartheta = I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

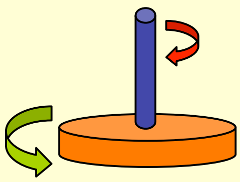
per piccolo angolo $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{Mgr_c}{I}\vartheta = 0$

moto armonico di pulsazione $\Omega = \sqrt{\frac{Mgr_c}{I}}$

se la massa è concentrata nel cdm $\Omega = \sqrt{\frac{Mgr_c}{Mr_C^2}} = \sqrt{\frac{g}{r_c}}$

- **pendolo di torsione**:

disco appeso ad un filo elastico che reagisce alla torsione con un momento $M_z = -k\vartheta$



per cui $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{k}{I}\vartheta = 0$

la cui soluzione è un moto angolare puramente armonico, con pulsazione

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

dimensioni?
$[It^{-2}]=[M]=[k]$
$[k/I]=[t^{-2}]$

# energia cinetica dei corpi rigidi

- Energia cinetica di un corpo rigido in rotazione

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i^{\,\prime}$$

rotazione intorno al baricentro

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \left( v_c^2 + 2\vec{v}_c \cdot \omega \wedge \vec{r}_i^{\,\prime} + \left( \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i^{\,\prime} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \left( \omega \rho_i \right)^2 = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

valida anche per ω variabile. Confrontandola con l'espressione generale dell'energia di un sistema, nel riferimento del c.d.m. risulta $K' = \frac{1}{2} I_c \omega^2$

- Nel caso di pura traslazione, $K = \frac{1}{2} M v_c^2$
- Energia cinetica di un corpo in rotazione intorno ad un asse fisso: in questo caso conviene calcolare le velocità direttamente rispetto ad un punto dell'asse:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{r}_i(t)$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \left( \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \right)^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \left( \omega \rho_i \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left( I_c + M d^2 \right) \omega^2$$

rotazione nel sistema del baricentro

rotazione del baricentro intorno all'asse

# lavoro di forze e momenti

Per un sistema rigido, poiché le distanze tra i punti non possono variare, le forze interne non compiono lavoro.

Per le forze esterne si ha:

$$\delta L = \sum \vec{f}_i^{(e)} \cdot \vec{v}_i dt = \sum \vec{f}_i^{(e)} \cdot \left(\vec{v}_c + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i^{\,\prime}\right) dt =$$

$$= \vec{F}^{(e)} \cdot \vec{v}_c dt + \sum \vec{r}_i^{\,\prime} \wedge \vec{f}_i^{(e)} \cdot \vec{\omega} dt = \vec{F}^{(e)} \cdot \vec{v}_c dt + \vec{M}_c^{(e)} \cdot \vec{\omega} dt$$

il primo termine corrisponde alla variazione dell'energia associata al moto del c.d.m., il secondo alla variazione dell'energia cinetica di rotazione.

Nel caso di rotazioni intorno ad un asse fisso il lavoro diventa semplicemente $\delta L = M_z^{(e)} d\vartheta$

Il momento motore, quindi, si riduce alla componente assiale del momento totale, sia dal punto di vista dell'accelerazione angolare, sia da quello dell'energia.

Bisogna ricordare tuttavia che eventuali componenti ortogonali (necessari ad esempio per tenere in rotazione assi non bilanciati) richiedono forze (pressioni) sui vincoli, con conseguente aumento degli attriti. Questi a loro volta generano momenti assiali che rallentano la rotazione, e vanno quindi minimizzati.