Onde

esempi di onde:

- frusta
- onde sulla superficie del mare
- suono
- onde radio
- luce

Cosa accomuna questi esempi?

propagazione di “qualcosa” a cui non corrisponde una propagazione di “materia”

(ma sicuramente è presente una propagazione di energia)

Cosa si propaga? la perturbazione di uno stato di equilibrio (piccole perturbazioni $\Rightarrow$ oscillazioni)

- Onde trasversali: perturbazione ortogonale alla propagazione
- Onde longitudinali: perturbazione parallela alla propagazione

equazione delle onde

come si descrive un'onda?

caso unidimensionale: la perturbazione si propaga in una direzione x $\quad f = f(x,t)$

- per un'onda trasversale, f è lo spostamento in y
- per un onda longitudinale è lo spostamento in x

Tutte le onde obbediscono alla stessa equazione, l'**equazione di D'Alembert** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

La soluzione di questa equazione ha una forma molto generale $\quad f = f(x \pm vt)$

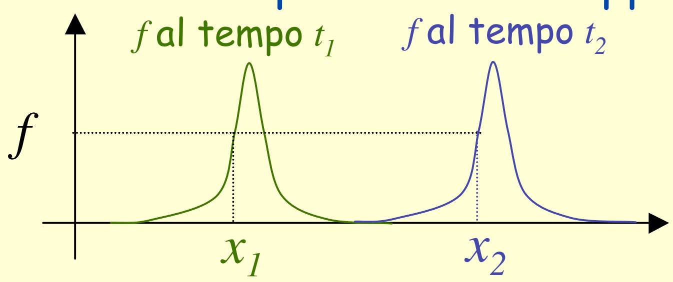
come si verifica derivando due volte rispetto a x o rispetto a t $\quad \dfrac{\partial f}{\partial t} = \pm v \dfrac{\partial f}{\partial x}; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

l'esspressione analitica della funzione f è arbitraria, ed è fissata dalle condizioni iniziali $f(x, t=0)$

Cosa rappresenta una funzione $f = f(x \pm vt)$?

per $x_1 - vt_1 = x_2 - vt_2$ $\;f$ è uguale

f è la stessa per tutte le coppie di punti tali che



$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$$

per costruzione, la funzione f si ritrova identica ma spostata

la forma dell'onda si sposta con velocità $\quad v = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

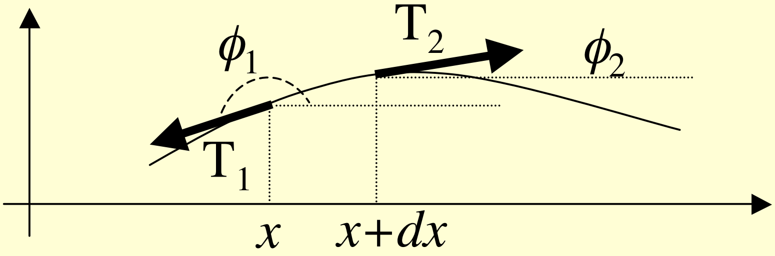
da dove viene l'eq. di d'Alembert?

onde (trasversali) su una corda

densità lineare μ

$dm=\mu dx$

$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \mu dx \vec{a}$



Proiettando sugli assi l'equazione vettoriale si ha

$$T_2 \cos\phi_2 + T_1 \cos\phi_1 = 0 \Rightarrow T_2 - T_1 \approx 0 \Rightarrow T_2 \approx T_1 = T$$

$$T_2 \sin\phi_2 + T_1 \sin\phi_1 = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\sin\phi_1 \approx \tan\phi_1 = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$$

$$\sin\phi_2 \approx \tan\phi_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} \approx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

e quindi $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} T dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

ossia l'equazione di d'Alembert con $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Principio di sovrapposizione:

poiché la derivazione è un operatore lineare, una somma di soluzioni dell'eq. di d'Alembert è ancora soluzione