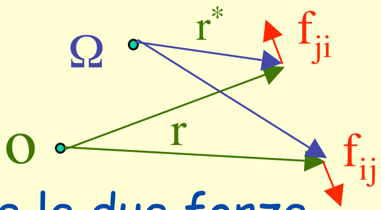
momento angolare di un sistema

- Momento angolare totale $\vec{P}_\Omega = \sum \vec{r}_i^{\,*} \wedge \vec{q}_i = \sum \vec{p}_i$

usando il teorema del momento angolare $\vec{m}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \vec{v}_\Omega \wedge \vec{q}_i$

$$\frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} = \sum\left(\vec{m}_i - \vec{v}_\Omega \wedge \vec{q}_i\right) = \sum \vec{m}_i - \vec{v}_\Omega \wedge \vec{Q} = \vec{M} - \vec{v}_\Omega \wedge \vec{Q}$$

Anche in questo caso, il momento risultante delle forze comprende solo le forze esterne, infatti per le forze interne possiamo scrivere



$$\vec{M}^i = \sum_{i,j} \vec{r}_i^{\,*} \wedge \vec{f}_{ji} + \vec{r}_j^{\,*} \wedge \vec{f}_{ij} = \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{f}_{ji} = 0$$

poiché per il principio di azione e reazione le due forze hanno **la stessa retta di azione**, ossia sono dirette secondo la congiungente dei due punti materiali.

Se Ω è fisso o coincide col c.d.m., $\vec{v}_\Omega \wedge \vec{Q} = 0$

e abbiamo la **seconda equazione cardinale** $\vec{M}^e = \frac{d\vec{P}}{dt}$

In assenza di momenti esterni, **il momento angolare si conserva**

Considerando un sistema di coordinate S' centrato nel c.d.m., possiamo scrivere:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i{}'$$
$$\vec{P}_O = \sum(\vec{r}_c + \vec{r}_i{}') \wedge \vec{q}_i = \vec{r}_c \wedge \vec{Q} + \vec{P}_c$$

dove P_C è il momento angolare rispetto al baricentro **(terzo teorema del c.d.m.)**

terzo principio

- utilizzando il principio di azione e reazione abbiamo ricavato le due equazioni cardinali,

$$\vec{F}^e = \frac{d\vec{Q}}{dt} \qquad \vec{M}^e = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

  da cui segue che per un sistema isolato si conservano la quantità di moto ed il momento angolare.
- In realtà le basi sperimentali di queste due leggi di conservazione sono oggi molto più vaste di quelle del principio di azione e reazione, essendo verificate anche a livello microscopico (dove non sarebbe possibile fare misure classiche di forza) e senza ricorrere all'ipotesi di azione a distanza, richiesta dalla formulazione newtoniana del principio di azione e reazione
- Queste due leggi di conservazione sono considerate quindi oggi come la formulazione del terzo principio della dinamica.
- Da esse, applicate ad un sistema isolato di due corpi, si ricava infatti immediatamente il principio di azione e reazione newtoniano:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \sum \vec{f}_i = 0 \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \sum \vec{m}_i = 0 \qquad f_1 = -f_2, \quad \vec{m}_1 = -\vec{m}_2$$

forze parallele e baricentro

- sistemi di forze parallele (es. forza peso) $\vec{f}_i = f_i \hat{u}$

la risultante delle forze sarà $\vec{F} = \sum f_i \hat{u}$

per il risultante dei momenti si ha:

$$\vec{M} = \sum \left(\vec{r}_i \wedge \vec{f}_i \right) = \left(\sum f_i \vec{r}_i \right) \wedge \hat{u}$$

e definendo $\vec{r}_f = \dfrac{\sum f_i \vec{r}_i}{\sum f_i}$ **centro delle f. parallele**

si ha $\vec{M} = \left(\sum f_i \right) \vec{r}_f \wedge \hat{u} = \vec{r}_f \wedge \vec{F}$

per cui, considerando la forza risultante applicata in r_f, questa avrà lo stesso risultante dei momenti del sistema di forze parallele, e dunque lo stesso effetto sulla quantità di moto e sul momento angolare del sistema

(esempio di sistemi di forze equivalenti)

- nel caso della forza peso, $\vec{f}_i = m_i \vec{g}$

e per g costante, r_f (detto **baricentro**) coincide col c.d.m.