soluzioni sinusoidali

- l'argomento di una funzione sinusoidale deve essere adimensionale: $k(x \pm vt) = kx \pm \omega t \qquad \omega = kv$

$$f(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t) = \Re\left(Ae^{i(kx \pm \omega t)}\right)$$

- in una posizione fissata x, la perturbazione si muove di moto armonico. Per una corda, ogni elemento di essa si muove di moto armonico. Viceversa, se un punto di una corda è sollecitato a muoversi di moto armonico, diventa **sorgente** di un'onda sinusoidale.
- k è detto numero d'onda
- ponendo $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ e $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$
  possiamo scrivere $f = A\cos\left(2\pi\left(\dfrac{x}{\lambda} \pm \dfrac{t}{T}\right)\right)$
- T è il periodo dell'oscillazione della perturbazione
- λ è la lunghezza di una oscillazione spaziale completa a t fissato
  e si ha $v = \dfrac{\lambda}{T}$

N.B. fissata la pulsazione (o il periodo) dalla frequenza della sorgente, λ rimane fissato da v. Due sorgenti con la stessa frequenza daranno in mezzi diversi (v diverse) lo stesso periodo ma λ diverse.

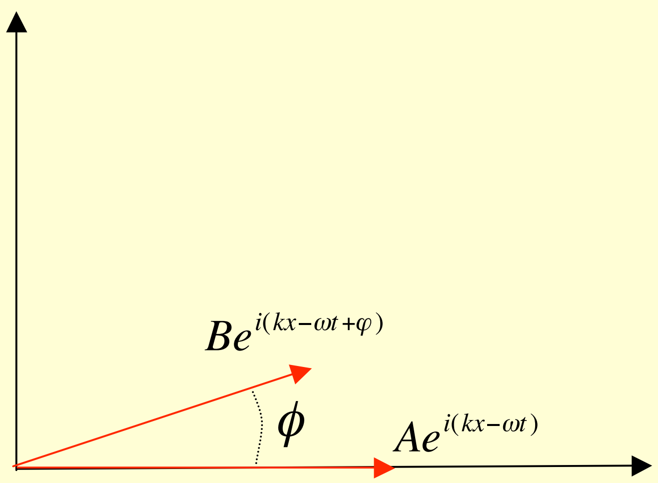
Grazie al principio di sovrapposizione, una somma di sinusoidi è ancora soluzione: **sviluppo in serie di Fourier** di una soluzione periodica qualunque.

rappresentazione complessa delle onde sinusoidali

- una grandezza sinusoidale può essere espressa come parte reale o parte immaginaria di un vettore complesso:
$$A\cos(kx-\omega t)=\Re\left(Ae^{i(kx-\omega t)}\right)$$
$$A\sin(kx-\omega t)=\Im\left(Ae^{i(kx-\omega t)}\right)$$
- al variare dell'argomento, il vettore ruoterà nel piano complesso, mantenendo fisso il modulo

Se due grandezze sinusoidali sono sfasate di ϕ, al variare dell'argomento i due vettori ruoteranno solidali, sempre separati di un angolo ϕ

- popssiamo rappresentare convenzionalmente i vettori con la loro posizione per $kx\text{-}\omega t=0$, per cui il primo vettore sarà diretto come l'asse x, ed il secondo sarà ruotato di un angolo ϕ



intensità di un'onda sinusoidale su una corda

- calcoliamo l'energia cinetica associata ad un elementino di corda vibrante:

$$dk = \frac{1}{2}\mu dx \dot{y}^2$$

$$y = A\sin(kx - \omega t)$$

$$\dot{y} = -A\omega\cos(kx - \omega t)$$

ora, per un oscillatore $E = k + V = k_{max}$ per cui

$$dE = \frac{1}{2}\mu dx \dot{y}^2_{\max} = \frac{1}{2}\mu dx A^2\omega^2 = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v dt$$

e chiamando intensità dell'onda l'energia trasportata lungo la corda nell'unità di tempo, si ha:

$$I = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2$$

la dipendenza dell'intensità dell'onda (ossia dell'energia trasportata) dal quadrato dell'ampiezza e dal quadrato della frequenza è del tutto generale, per qualsiasi tipo di onda.

interferenza

Due onde della stessa natura che si sovrappongono nella stessa regione possono dar luogo a fenomeni di **interferenza**

La relazione matematica fondamentale che presiede ai fenomeni di interferenza di onde sinusoidali è la somma di due sinusoidi:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Consideriamo ad es. due onde sinusoidali con la stessa ampiezza e frequenza ma fasi diverse

$$f_1 = A\sin(kx - \omega t)$$

$$f_2 = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$f = f_1 + f_2 = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx - \omega t + \varphi) = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

per cui l'ampiezza complessiva va da 0 (onde in opposizione di fase, interferenza distruttiva) a 2A (onde in fase, interferenza costruttiva), a seconda della fase relativa delle due onde

In termini di intensità (ossia di energia trasportata) questa può andare da 0 a 4 volte l'intensità della singola onda. (chi fornisce l'energia in più?)