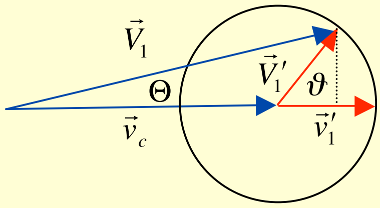
complementi: relazione tra angoli di diffusione nel laboratorio e nel c.d.m.

Consideriamo un urto elastico, ed indichiamo in minuscolo le velocità dello stato iniziale e in maiuscolo quelle dello stato finale. Avremo:

$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \qquad \vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_1 = \frac{m_2 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{v_c}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2} \qquad \left|\vec{v}_1'\right| = \left|\vec{V}_1'\right|$$

per costruzione geometrica:



$$\tan\Theta = \frac{V_1' \sin\vartheta}{v_c + v_1' \cos\vartheta} = \frac{v_1' \sin\vartheta}{v_c + v_1' \cos\vartheta} = \frac{\sin\vartheta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\vartheta}$$

il valore di θ dipenderà dai dettagli dell'interazione, ma sarà compreso tra 0 e π

per il valore di Θ si deve distinguere:

- bersaglio pesante $m_1 < m_2 \Rightarrow v_c < v_1$

l'origine dei vettori blu è interna alla circonferenza, tutti i Θ sono possibili.

- bersaglio leggero $m_1 > m_2 \Rightarrow v_c > v_1$

l'origine dei vettori blu è esterna alla circonferenza, il massimo valore di Θ si ha quando V_1 è tangente alla circonferenza:

$$v_1' = v_c \sin\Theta_{max}$$

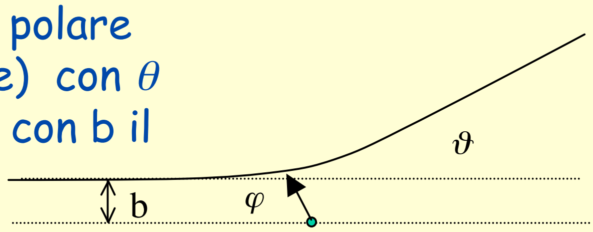
$$\sin\Theta_{max} = \frac{m_2}{m_1}$$

diffusione elastica in campo coulombiano repulsivo

$$F = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{\alpha}{r^2} \qquad V(r) = \frac{\alpha}{r}$$

- assumiamo $m_2 >> m_1$ (lab e c.d.m. coincidono): possiamo considerare il moto del proiettile in un campo fisso centrale, dove si conservano p e $k+V$

indichiamo con φ la coordinata polare (variabile durante l'interazione) con θ l'angolo di deflessione finale e con b il parametro d'urto



- conservazione di p:

$$\vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$p = mr^2\omega = mr^2\frac{d\varphi}{dt}$$

$$mv_0 b = mr^2\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{bv_0}\frac{d\varphi}{dt}$$

- applichiamo il secondo principio nella direzione ortogonale alla linea di volo dello stato iniziale:

$$F_y = \frac{\alpha}{r^2}\sin\varphi = m\frac{dv_y}{dt}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\alpha}{mr^2}\sin\varphi = \frac{\alpha}{mbv_0}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

- integriamo l'ultima equazione tra lo stato iniziale e quello finale:

$$\text{stato iniziale}: v_y = 0, \varphi = 0; \quad \text{stato finale}: v_y = v_0\sin\vartheta, \varphi = \pi - \vartheta$$

$$\int_0^{v_0\sin\vartheta} dv_y = \int_0^{\pi-\vartheta}\frac{\alpha}{mbv_0}\sin\varphi d\varphi$$

$$v_0\sin\vartheta = \frac{\alpha}{mbv_0}\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi-\vartheta} = \frac{\alpha}{mbv_0}(1+\cos\vartheta)$$

$$b\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = b\tan\frac{\vartheta}{2} = \frac{\alpha}{mv_0^2} = \frac{\alpha}{2E}$$