diffusione di un fascetto di proiettili su un bersaglio finito

$$\tan\frac{\vartheta}{2} = \frac{\alpha}{2bE} \quad b = \frac{\alpha}{\tan\frac{\vartheta}{2}2E} \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

- maggiore è il parametro d'urto b, minore è l'angolo di deflessione. Una singola misura di θ permette di determinare b

A livello microscopico non c'è possibilità di controllare b

Viceversa, in un esperimento si avrà sempre un fascetto di proiettili, distribuiti su una certa sezione S, che colpiscono un blocchetto di materiale, contenente moltissimi bersagli. Indichiamo con N il numero di bersagli contenuti sotto la superficie S

Se guardiamo il fascetto da un singolo bersaglio, possiamo dire che tutti i proiettili la cui linea di volo passa ad una distanza dal bersaglio compresa tra b e $b+db$ sarà deviata dello stesso angolo θ. Se indichiamo con I il numero di proiettili che arrivano sul bersaglio nell'unità di tempo, la quantità I/S rappresenta il flusso di proiettili, ossia il numero di proiettili per unità di tempo e unità di superficie.

Il numero di proiettili che arriva nell'unità di tempo con parametro d'urto compreso tra b e $b+db$ sarà

$$\frac{I}{S}2\pi b\,db$$

formula di Rutherford

- Per avere il numero totale di proiettili deflessi tra θ e $\theta+d\theta$, trascurando le diffusioni multiple, si dovrà moltiplicare per il numero di bersagli N

$$dn = N\frac{I}{S}2\pi b db$$

differenziando b si ha:

$$db = -\frac{\alpha}{4E}\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}d\vartheta \qquad \left[d\left(\frac{1}{\tan x}\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx \ \text{ e } \ dx = \frac{d\vartheta}{2}\right]$$

e sostituendo si ottiene la formula di Rutherford

$$dn = N\frac{I}{S}\frac{2\pi\alpha\cos\frac{\vartheta}{2}}{2E\sin\frac{\vartheta}{2}}\frac{\alpha}{4E}\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}d\vartheta = N\frac{I}{S}\frac{\alpha^2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}d\vartheta}{8E^2\sin^4\frac{\vartheta}{2}} = N\frac{I}{S}\frac{\alpha^2 2\pi\sin\vartheta d\vartheta}{16E^2\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

la quantità $d\Omega = 2\pi\sin\vartheta d\vartheta$

è detta angolo solido (rapporto tra superficie e quadrato del raggio, come l'angolo è il rapporto tra arco e raggio) mentre $\dfrac{\alpha^2}{16E^2\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$

ha le dimensioni di una superficie ed è detta sezione d'urto differenziale

$$\frac{dn}{d\Omega} = N\frac{I}{S}\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

in quanto rappresenta la superficie efficace per la diffusione a quel dato angolo