Leggi di Keplero

1 Le orbite dei pianeti sono ellissi col Sole in uno dei fuochi

2 Il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali

3 I quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionale ai cubi dei raggi (semiassi maggiori)

- Osservazioni sperimentali (Brahe, Keplero) ricondotte da Newton alla legge di gravitazione universale e ai principi della dinamica

Trascurando l'influsso degli altri pianeti, il problema si può ricodurre ad un problema a due corpi nel quale, dati i valori delle masse, la massa ridotta coincide con la massa del pianeta e il Sole è praticamente fermo.

- Forza centrale
  - conservazione del momento angolare

$$\vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\tau}\right) = mr^2\dot{\theta}\hat{k} = mr^2\vec{\omega}$$

$\boldsymbol{p}$ costante, $\boldsymbol{k}$ costante $\Rightarrow$ moto piano

  - conservazione dell'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r) = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_S m_p}{r}$$

prima legge (1)

scomponendo la velocità in coordinate polari:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

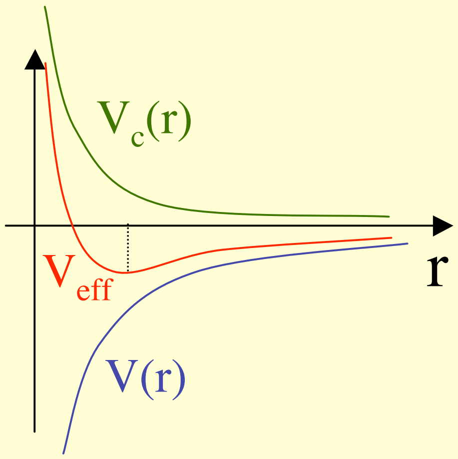
$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - G\frac{M_S m_p}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{p^2}{2mr^2} - G\frac{M_S m_p}{r}$$

Se si introduce il **potenziale efficace**

$$V_{eff}(r) = \frac{p^2}{2mr^2} - G\frac{M_S m_p}{r} = V_c(r) + V_G(r)$$

la conservazione dell'energia si scrive

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$



Come si interpreta?

In un riferimento rotante col pianeta, questo è soggetto alla gravitazione, attrattiva e alla forza centrifuga, repulsiva.

E' facile verificare che V_c rappresenta il potenziale della forza centrifuga:

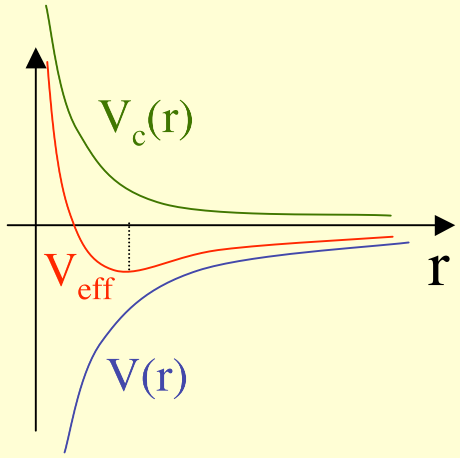
essendo $\omega = \frac{p}{mr^2}$

si ha $f_c = mr\omega^2 = mr\frac{p^2}{m^2r^4} = \frac{p^2}{mr^3}$

$$V_c = -\int f_c dr = -\int \frac{p^2}{mr^3}dr = -\frac{p^2}{m}\int\frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{mr^2}$$

prima legge (2)

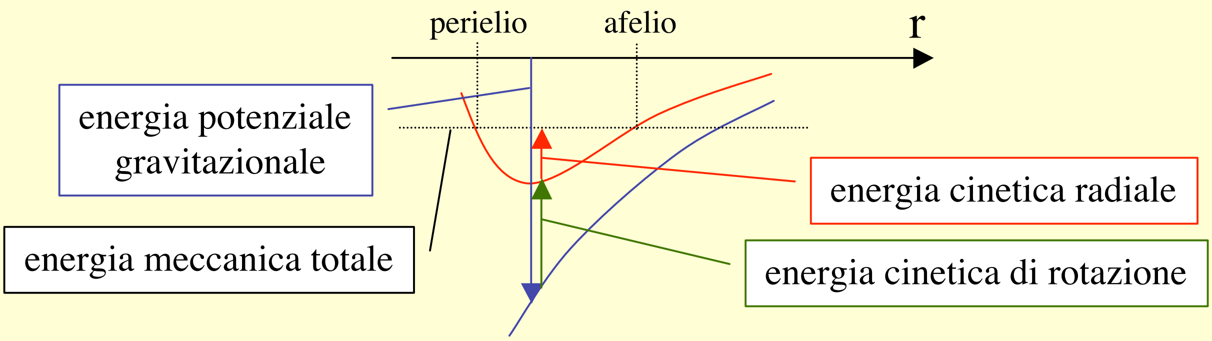
$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$



Per piccoli r, domina V_c, per cui il pianeta non può cadere sul Sole, a grandi r domina V_G

Il pianeta non può allontanarsi indefinitamente se $E<0$.

Se E coincide col minimo di V_{eff}, l'orbita è perfettamente circolare, altrimenti il pianeta oscilla tra afelio (r_{max}) e perielio (r_{min}), descrivendo un'orbita ellittica.



orbite circolari

Quando l'orbita è circolare, $\dot{r} = 0$

(moto circolare uniforme)

$$E = \frac{p^2}{2mr^2} - G\frac{M_S m_p}{r}$$

Il valore di r corrisponde al minimo del potenziale efficace (equilibrio **dinamico**):

$$\frac{d}{dr}V_{eff}(r) = -\frac{p^2}{mr^3} + G\frac{M_S m_p}{r^2} = 0$$

$$r_{circ} = \frac{p^2}{GMm^2}$$

inoltre per questo valore si ha:

$$k = \frac{p^2}{2mr_{circ}^2} = \frac{r_{circ}GMm^2}{2mr_{circ}^2} = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_{circ}} = -\frac{1}{2}V$$

ossia l'energia cinetica è sempre la metà del modulo del potenziale gravitazionale

e quindi aumenta al diminuire del raggio