derivate di vettori e di versori

derivata di un vettore

$$\vec{w}(t) = w_x(t)\hat{i} + w_y(t)\hat{j} + w_z(t)\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dw_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dw_z(t)}{dt}\hat{k}$$

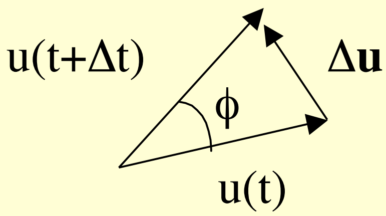
se il modulo di un vettore è costante (per es. per un versore), la derivata del vettore è ortogonale al vettore stesso:

$$|\vec{w}(t)| = \text{cost} \Rightarrow \vec{w}(t)\cdot\vec{w}(t) = w^2 = \text{cost}$$

$$\frac{d\left(\vec{w}(t)\cdot\vec{w}(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt}\cdot\vec{w}(t) + \vec{w}(t)\cdot\frac{d\vec{w}}{dt} = 2\frac{d\vec{w}}{dt}\cdot\vec{w}(t) = \frac{d(\text{cost})}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{w}}{dt}\perp\vec{w}$$

calcoliamo esplicitamente il modulo della derivata di un versore **u**:

$$\frac{|\Delta u|}{\Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$



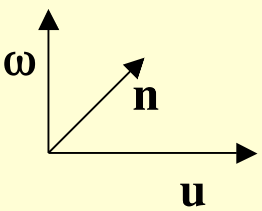
$$\frac{du}{dt} = \lim_{dt\to 0}\frac{|\Delta u|}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{n} \longrightarrow$$ direzione di **du**, ortogonale ad **u**

$\downarrow$

velocità di rotazione, o velocità angolare, ω

se diamo ad ω la direzione dell'asse attorno a cui ruota **u**:



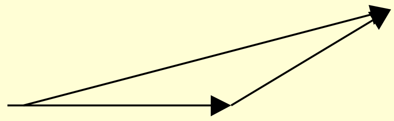
$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\hat{u}$$ **relazione di Poisson**

Per un vettore generico, $\vec{w} = w\hat{u}_w : \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(w\hat{u}_w\right) = \frac{dw}{dt}\hat{u}_w + \vec{\omega}\wedge\vec{w}$

carattere vettoriale di una grandezza fisica

Perché una grandezza fisica sia un vettore, deve soddisfare le leggi di somma di vettori

$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$



e deve trasformarsi come un vettore per cambiamenti di riferimento

Quando consideriamo una grandezza fisica, dobbiamo quindi specificare quali sono le sue proprietà **geometriche**, ossia le sue proprietà di trasformazione (scalare, vettore, vettore assiale, ecc.)

Se vogliamo che le leggi fisiche non dipendano dal sistema di riferimento, devono essere espresse da relazioni geometricamente omogenee: p. es.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + a\,\boldsymbol{w}$$

in sistemi di riferimento diversi, infatti, i due membri cambiano nello stesso modo, e l'uguaglianza rimane valida: parliamo allora di **covarianza** della legge.

descrizione del movimento

La conoscenza dell'evoluzione della posizione in funzione del tempo può essere espressa attraverso le "**leggi orarie**":

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} r &= r(t) \\ \vartheta &= \vartheta(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned}$$

che possono esprimersi in un'unica relazione vettoriale:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Le leggi orarie possono essere considerate come le rappresentazioni parametriche di una curva geometrica, la **traiettoria**

alternativamente, introducendo come parametro l'**ascissa curvilinea s** lungo la traiettoria, la descrizione del moto può essere data da:

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad \text{con} \quad s = s(t)$$

detta talvolta **rappresentazione intrinseca** della traiettoria

$s = s(t)$ è l'espressione scalare della legge oraria.

sostituendo in $r(s)$ si riottiene l'espressione vettoriale della legge oraria, $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$

velocità (1)

verso una definizione operativa della velocità:

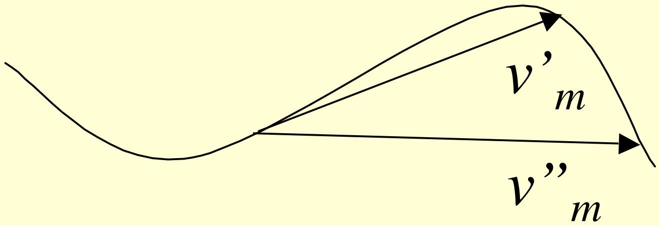
- ha velocità maggiore il punto materiale che, in uno stesso tempo, percorre una distanza maggiore.

se teniamo conto che gli spostamenti sono quantità vettoriali, possiamo pensare di definire un **vettore velocità** come il rapporto tra lo spostamento ed il tempo impiegato a percorrerlo

conoscendo la legge oraria, possiamo definire la **velocità media** tra due posizioni:

$$\vec{v}_m = \vec{v}_m(t_1, t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

la velocità media è definita a partire da due tempi diversi, e non è dunque univoca per ogni punto della traiettoria:



facendo tendere Δt a zero, si può definire una **velocità istantanea**, funzione di un unico valore del tempo t:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

rappresentazione cartesiana della velocità