Semplificazione delle funzioni logiche mediante il metodo delle mappe di Karnaugh

(26-02-03)

Stefano Porcarelli

ISTI-CNR, 56134 Pisa, Italy,
stefano.porcareli@guest.cnuce.cnr.it
http://bonda.cnuce.cnr.it

1 Le mappe di Karnough

Le semplificazioni di una funzione logica possono essere effettuate mediante i teoremi dell'algebra di Boole. Esiste pero' un metodo molto piu pratico di semplificazione che e quello costituito dalle mappe di Karnaugh. Tale metodo di facile applicazione per funzioni di poche variabili, in genere fino ad un massimo di quattro o cinque, risulta alquanto difficoltoso se le variabili diventano numerose. In Fig. 1 sono riportate le mappe di Karnaugh (di forma quadra o rettangolare) per funzioni di due, tre o quattro variabili.

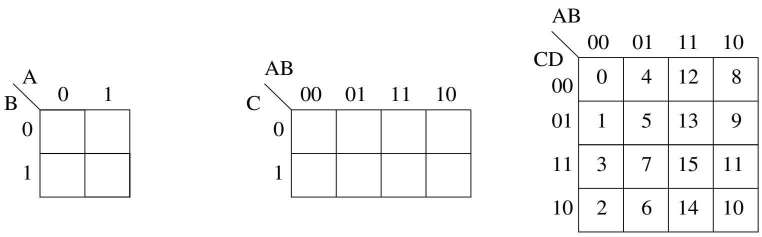

Fig. 1. Mappe di Karnough

Ogni mappa contiene tante caselle quante sono le 2^n combinazioni delle n variabili della funzione logica. Caselle che hanno un lato in comune sono dette adiacenti. Debbono essere considerate adiacenti anche le caselle all'estremita' di una riga o di una colonna, come se la mappa fosse disegnata su una superficie chiusa su se stessa. Sono caselle adiacenti, ad esempio, le caselle 0 e 8, 10 e 8, 5 e 7; non lo sono invece le caselle 4 e 13, 1 e 13 etc. Le caselle inoltre sono disposte in modo tale che passando da una qualsiasi ad una adiacente sulla stessa riga o sulla stessa colonna cambia di valore una sola variabile. Per rappresentare una funzione Y sulla mappa basta scrivere 1 nelle caselle corrispondenti alle combinazioni per le quali la funzione vale 1. Ad esempio alla funzione:

$$Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + ABC + A\bar{B}C$$

(forma canonica della somma) corrisponde la seguente mappa di Karnaugh:

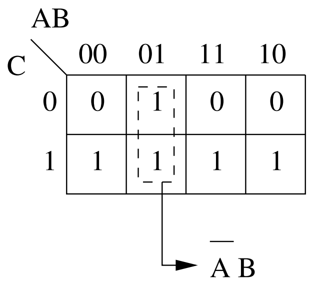

Fig. 2.

Si considerino ora le due caselle comprese nel rettangolo tratteggiato; esse corrispondono alle combinazioni 010 e 011 delle variabili A, B, C, e quindi nell'espressione algebrica della funzione alla somma del secondo e terzo termine che vale:

$$\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC = \bar{A}B(C + \bar{C}) = \bar{A}B$$

Il prodotto $\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ cosi' ottenuto e' evidenziato nella Fig. 2 dal rettangolino che racchiude i due 1 adiacenti. I due fattori che lo compongono sono dati da quelle variabili (A, B) che non cambiano di valore (0,1) nelle due caselle del rettangolino.

Questo prodotto puo' essere scritto direttamente dall'osservazione della mappa, assumendo come fattori le variabili che mantengono il loro valore, negando quelle a valore 0 e lasciando inalterate quelle a valore 1.

Le considerazioni precedenti possono essere estese, riferendosi ancora alla Fig. 2, al raggruppamento delle quattro caselle contigue dell'ultima riga ottenendo come risultato dei quattro 1 adiacenti il solo termine C. Infatti lungo tutta la riga la sola variabile che resta costante e' la C, (che non va poi negata perche' vale 1).

Poiche' tutti gli 1 della mappa sono stati inclusi nei rettangoli tratteggiati, la somma dei termini corrispondenti a detti rettangolini da' come risultato l'espressione minima della funzione:

$$Y = \bar{A}B + \bar{C}$$

Tale risultato puo essere raggiunto, come puo essere facilmente verificato, applicando i teoremi dell'algebra di Boole.

In generale, per funzioni logiche di n variabili si puo dire che:

- due 1 adiacenti rappresentano un prodotto di $n - 1$ variabili
- quattro 1 adiacenti rappresentano un prodotto di $n - 2$ variabili

- otto 1 adiacenti rappresentano un prodotto di $n-3$ variabili
- sedici 1 adiacenti rappresentano un prodotto di $n-4$ variabili
- etc....

In definitiva per minimizzare una funzione logica mediante il metodo delle mappe di Karnaugh si opera nel modo seguente: a) si rappresenta la funzione logica sulla mappa; b) si localizzano sulla mappa i piu grandi raggruppamenti possibili di 1 adiacenti che formano potenze del due; c) si sceglie il numero minimo di raggruppamenti che copre tutti gli 1 della mappa tenendo conto che eventuali termini isolati debbono essere riportati integralmente.

Esempio 1: Realizzare lo schema logico che soddisfa la seguente tabella di verita' di Fig 3.

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Fig. 3.

La forma canonica della somma vale:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

e la rappresentazione della funzione sulla mappa di Karnaugh e la seguente:

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

Fig. 4.

Dall'esame della Fig. 3 si puo' notare che sono possibili due diversi raggruppamenti di 1 adiacenti (Figg. 5a, b) a cui corrispondono due diverse espressioni:

$$Y_a = \bar{A}B + \bar{A}\bar{C} + A\bar{B}$$

$$Y_b = \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{B}\bar{C}$$

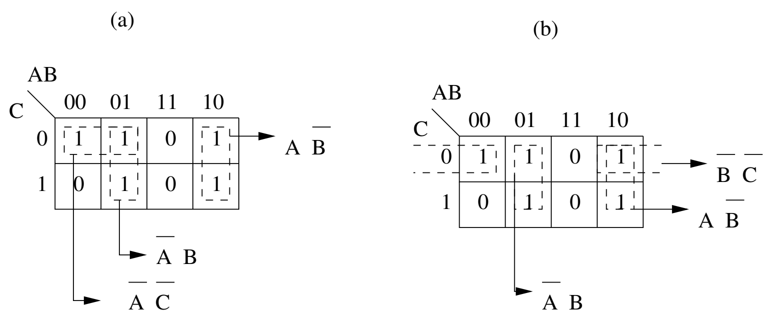

Fig. 5.

Alle due espressioni di Y_a e Y_b, entrambe minime, corrispondono gli schemi logici di Figg. 6 e 7, rispettivamante:

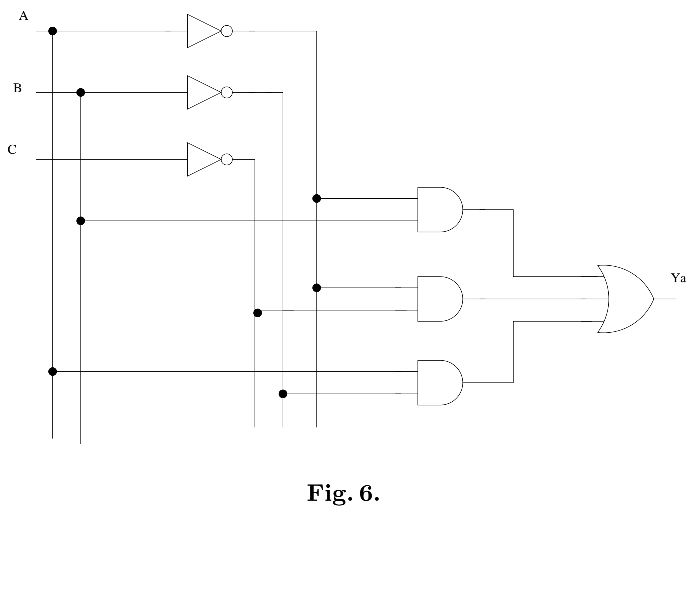

Fig. 6.

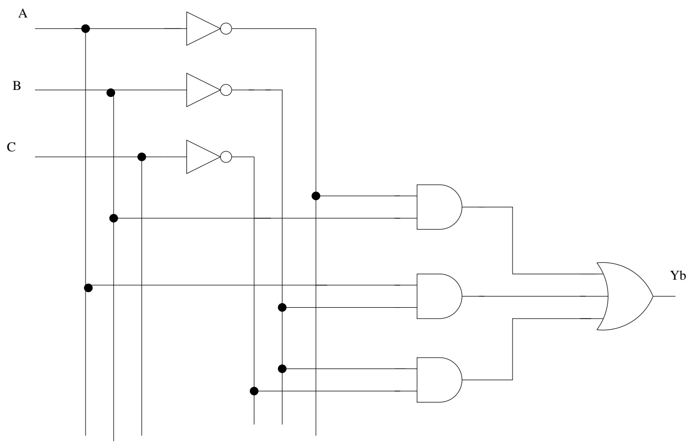

Fig. 7.

□

Puo' essere facilmente verificato che i circuiti di Fig. 6 e fig. 7 soddisfano alla medesima tabella della verita' e quindi realizzano la stessa funzione logica pur partendo da espressioni diverse. In definitiva si puo' dire che da una mappa di Karnaugh e possibile ricavare funzioni minime diverse a seconda del raggruppamento scelto. Un non rigoroso raggruppamento di 1 adiacenti comporta una espressione ulteriormente semplificabile e quindi non minima.

Ad esempio, con riferimento alla mappa di fig. 4, al raggruppamento di 1 adiacenti di Fig 8 corrisponde la funzione:

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

Fig. 8.

$$Y = \bar{A}\bar{C} + A\bar{B} + \bar{A}BC$$

che non e' una funzione minima. Infatti, tramite i teoremi dell'algebra di Boole, si osserva che:

$$Y = \bar{A}(\bar{C} + BC) + A\bar{B} = \bar{A}(\bar{C} + B) + A\bar{B} =$$
$$\bar{A}\bar{C} + \bar{A}B + A\bar{B} = Y_a$$

Esempio 2: Determinare la funzione minima della mappa di Karnaugh di Fig. 9 e realizzare lo schema logico corrispondente.

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	0	0	1	0
10	0	1	0	0

Fig. 9.

I raggruppamenti sono indicati in Fig 10:

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	0	0	1	0
10	0	1	0	0

Fig. 10.

La funzione minima vale:

$$Y = \bar{B}\bar{C} + \bar{C}D + ABD + \bar{A}BC\bar{D}$$

lo schema che la realizza e quello di Fig. 11:

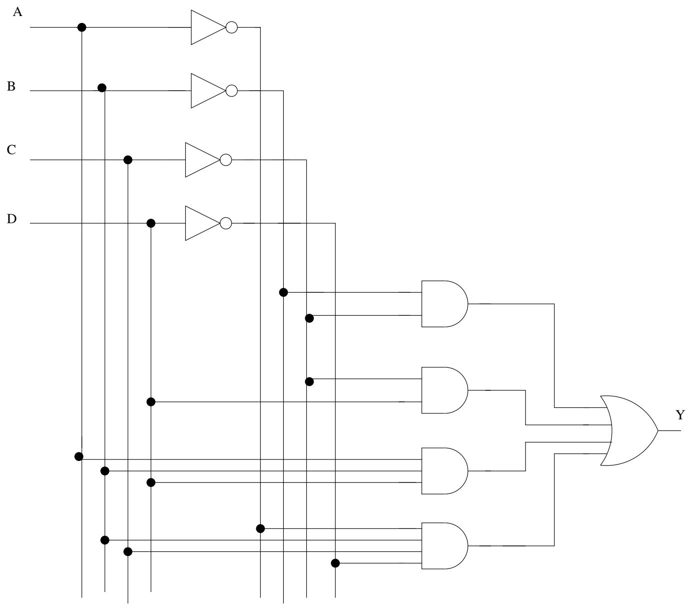

Fig. 11.

□

2 Mappe di Karnaugh per piu' di quattro variabili

Le mappe di Karnaugh per piu' di quattro variabili binarie devono essere costruite sempre rispettando la regola che nel passaggio da una casella a quella adiacente sulla stessa riga o sulla stessa colonna deve cambiare una sola variabile. Per quanto riguarda la semplificazione di una funzione a cinque variabili essa puo essere fatta mediante due mappe di Karnough da 16, come mostrato in Fig 12. Le adiacenze possono essere ben localizzate pensando di sovrapporre le due mappe e considerando adiacenti le caselle che si corrispondono verticalmente.

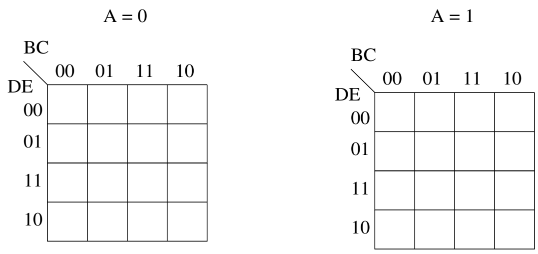

Fig. 12.

Esempio 3 : Minimizzare la seguente funzione:

$$Y = \bar{A}\bar{B}C\bar{D}E + \bar{A}BC\bar{D}E +$$

$$\bar{A}\bar{B}CDE + \bar{A}BCDE + ABC\bar{D}E$$

$$+ABCDE + A\bar{B}\bar{C}DE + A\bar{B}\bar{C}D\bar{E}$$

La mappa di Karnough con la rappresenatzione dei mintermini e' rappresentata in Fig. 13.

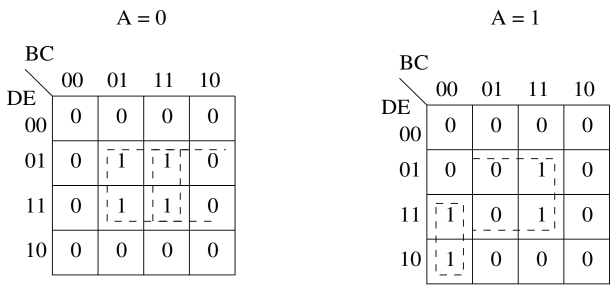

Fig. 13.

Ne segue che:

$$Y = \bar{A}CE + BCE + A\bar{B}\bar{C}D$$

□

Naturalmente all'aumentare del numero delle variabili della funzione da minimizzare aumenta il numero di caselle della mappa di Karnaugh corrispondente e di conseguenza anche la difficolta' dell'operatore nella ricerca di piu' ampi raggruppamenti possibili di 2^n celle adiacenti. In realta', quando il numero delle variabili binarie risulta maggiore di cinque e' preferibile passare ad altri sistemi di minimizzazione come, per esempio, quello di Quine Mc–Cluskey.

3 Condizioni di indifferenza

Accade, a volte, che il valore dell'uscita di un'assegnata tabella della verita' non venga specificato per alcune combinazioni delle variabili d'ingresso, o perche' queste combinazioni non possono verificarsi oppure perche', piu in generale, non interessa conoscere i valori dell'uscita corrispondenti a tali combinazioni. Si parla cosi' di condizioni di indifferenza. In questa situazione l'uscita, che puo' assumere indifferentemente il valore 0 o 1, viene riportata sulla mappa di Karnaugh con il simbolo "-". Le condizioni di indifferenza possono essere sfruttate al fine di semplificare la funzione logica ponendo al posto del simbolo "-" il valore 1, quando cio' e' conveniente, e 0 alrimenti.

Esempio 4 : Determinare la funzione minima corrispondente alla tabella della verita' di Fig. 14.

A	B	C	Y
0	0	0	–
0	0	1	1
0	1	0	–
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	–

Fig. 14.

La mappa di Karnaugh relativa alla precedente tabella e' la seguente:

C \ AB	00	01	11	10
0	–	–	0	1
1	1	0	–	1

Fig. 15.

Assumendo la condizione di indifferenza localizzata nel raggruppamento tratteggiato in Fig. 15 come 1 e le altre come 0, la funzione minima vale:

$$Y = \bar{B}$$

□