

# Laboratorio di Segnali e Sistemi - Capitolo 9 -

## Elaborazione numerica dei segnali digitali (Digital Signal Processing - DSP)



Claudio Luci  
SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

*last update : 070117*

# Sommario del capitolo:

- Introduzione all'elaborazione numerica dei segnali digitali (DSP)
- Campionamento dei segnali
- Teorema di Nyquist-Shannon
- Fenomeno dell'aliasing
- Trasformata di Fourier discreta (DFT)

# Introduzione

# Esempio di "processamento" analogico

- Vediamo un esempio in cui il segnale analogico (in questo caso voce e musica) viene catturato (ovvero trasformato in un segnale elettrico), registrato, trasferito, amplificato e infine ritrasformato in un segnale sonoro.



Conversione onda di pressione acustica in un segnale elettrico (trasduttore)

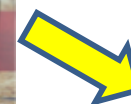
Il segnale elettrico, amplificato (ma non distorto) viene scritto su un mezzo di supporto (disco in vinile) in formato "analogico" (irregolarità del microsolco)



Trasmissione del segnale



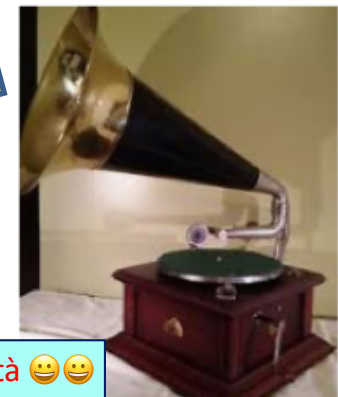
Ritrasformazione delle irregolarità del microsolco in un segnale elettrico



Alta fedeltà (Hi-Fi).  
Ritrasformazione del segnale elettrico in un segnale sonoro

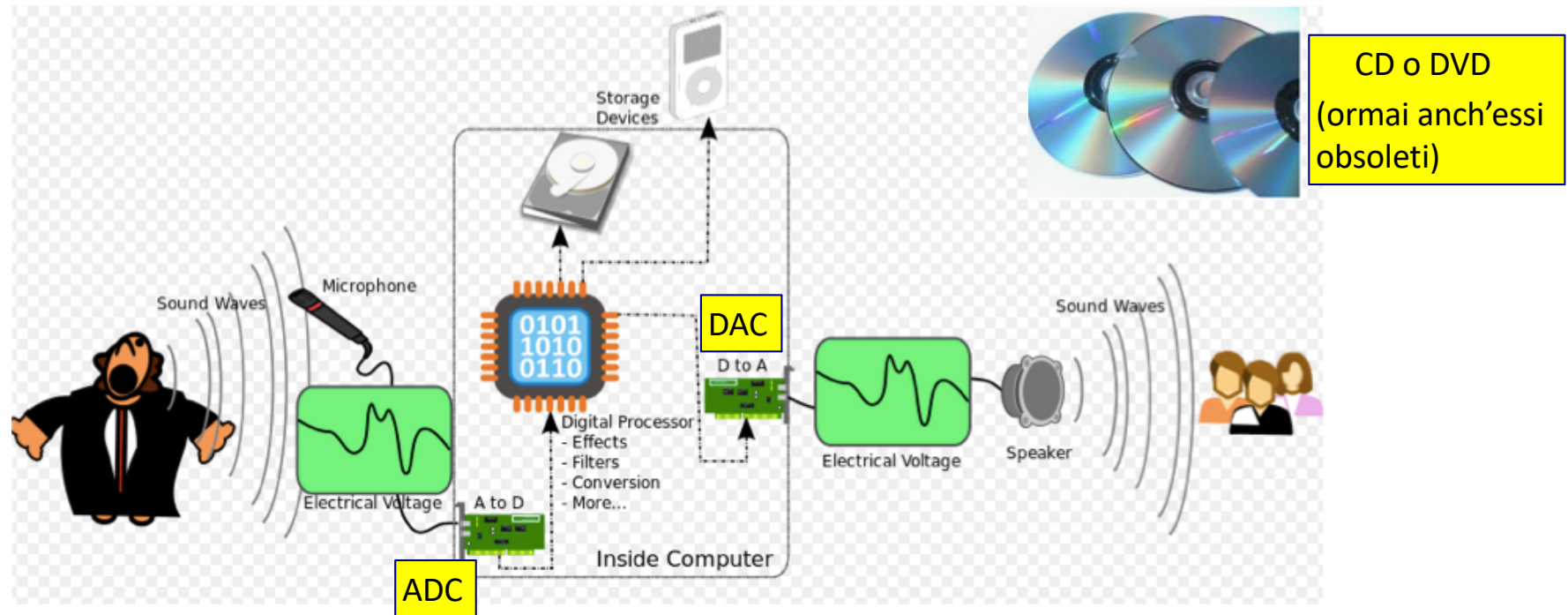


"Bassa" fedeltà 😊😊



# Registrazione digitale dei suoni

- Negli anni 90 del secolo scorso (come dite voi !!) la registrazione digitale delle canzoni ha gradualmente soppiantato la registrazione analogica per svariati motivi (costi, fedeltà dei suoni, possibilità di fare infinite copie della versione master originale, portabilità dei dispositivi, etc..)
- Lo schema generale è il seguente:

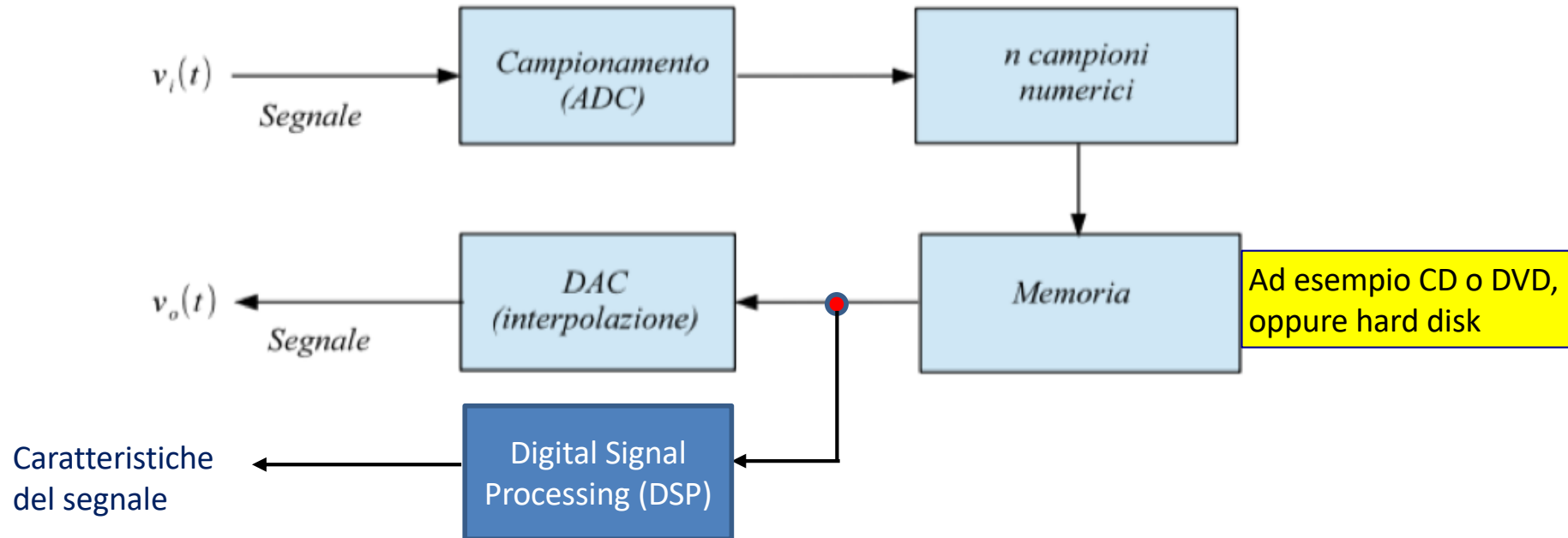


Il segnale digitale può essere manipolato in diversi modi nel computer (Digital Signal Processing), ad esempio il brano musicale può essere compresso nel formato MP3, riducendo di molto la dimensione del file

Il punto fondamentale in questo processo è il passaggio dal segnale analogico, che varia con continuità in funzione del tempo, al segnale digitale che per sua natura è un segnale discreto. Occorre quindi "campionare" il segnale analogico tramite un ADC. In generale la bontà dell'ADC determinerà la bontà del campionamento.

# Digital Signal Processing (DSP)

- Riassumendo, i passi da compiere per passare da un segnale analogico a un segnale digitale sono:



- Il segnale numerico può essere di nuovo trasformato in un segnale analogico, come nella riproduzione di un CD, oppure può subire un'elaborazione numerica (DSP) come ad esempio una trasformata di Fourier discreta (DFT) per trovare lo spettro delle frequenze che compongono il segnale analogico iniziale

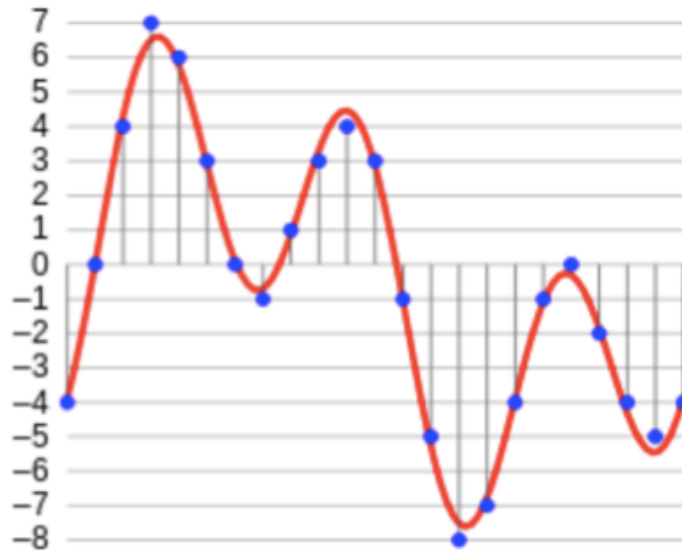
Vedremo quali sono le condizioni da soddisfare affinché il segnale numerico riproduca il più fedelmente possibile il segnale analogico senza perdita di informazioni.

# Campionamento dei segnali



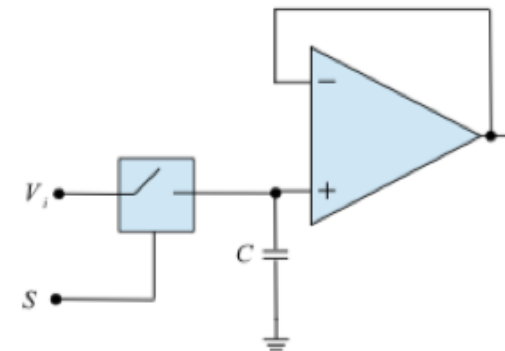
# Campionamento del segnale

- Nei casi in cui il segnale analogico non varia nel tempo, oppure varia molto lentamente, come nel caso di una tensione costante da misurare con un multimetro digitale, vanno bene anche gli ADC che abbiamo studiato finora (in realtà ne abbiamo visto solo uno)
- Nei casi in cui il segnale analogico varia molto velocemente in funzione del tempo, vi è la necessità di digitalizzare ripetutamente il segnale a diversi istanti di tempo (campionamento) in modo da non perdere l'informazione in esso contenuta. Quindi occorrono degli ADC "veloci".



Il tempo necessario per digitizzare un punto determina la "velocità" dell'ADC e, come vedremo, anche la massima frequenza che può essere campionata senza introdurre una distorsione del segnale (teorema di Nyquist-Shannon).

Sample and Hold

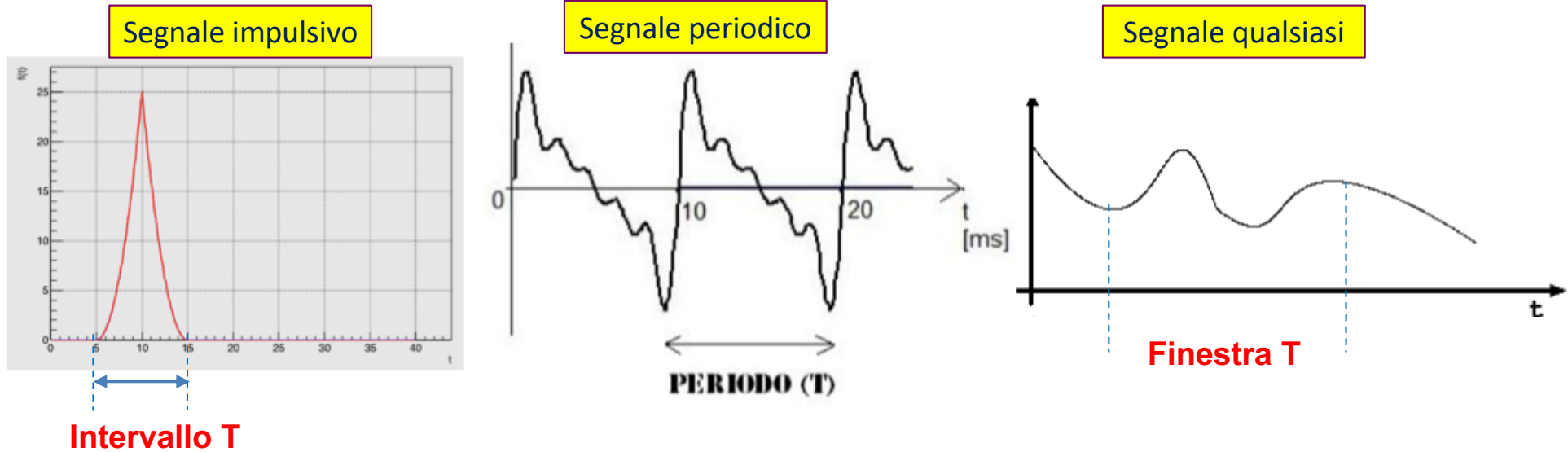


Occorre notare che durante la conversione è necessario che la tensione all'ingresso del dispositivo rimanga costante; questo è in genere ottenuto con un circuito **Sample and Hold**, dato tipicamente da una capacità che viene caricata al valore della tensione d'ingresso.



# Finestra di campionamento

- Vogliamo digitizzare un segnale analogico che varia nel tempo; si possono distinguere tre casi:



- Dobbiamo scegliere la finestra di campionamento del segnale:
  1. Nel caso del segnale impulsivo la finestra deve essere abbastanza grande da contenere tutto il segnale; occorre un segnale di trigger per far partire la digitizzazione.
  2. Nel caso del segnale periodico la finestra deve contenere uno o più periodi per riprodurre tutta la funzione.
  3. Nel caso di un segnale qualsiasi possiamo riprodurre il segnale solo all'interno della finestra di campionamento e non possiamo estrapolare la forma del segnale al di fuori di essa.

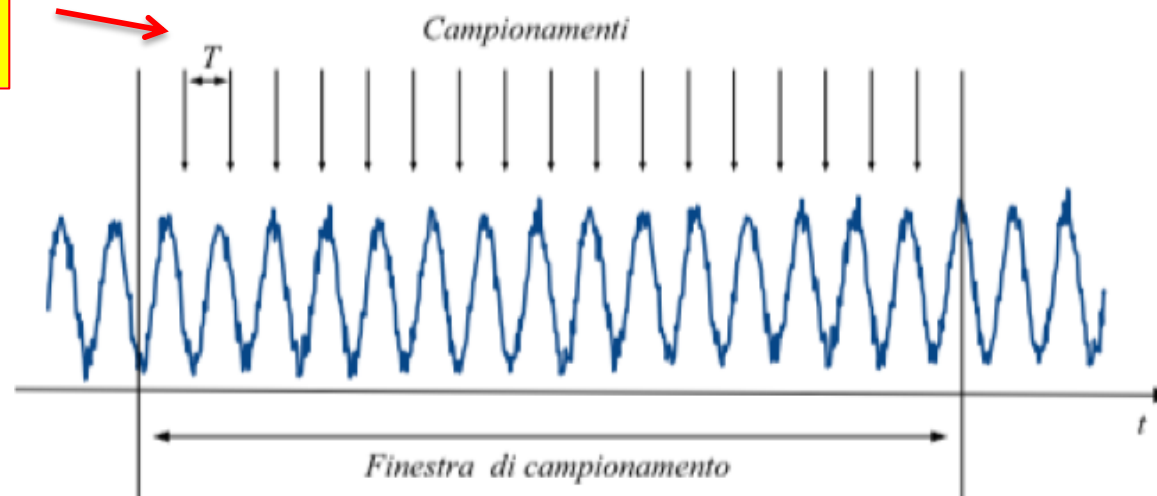
La larghezza della finestra di campionamento dipende da quanto è grande la memoria per registrare i valori digitizzati.

# Teorema di Nyquist-Shannon

# Frequenza di Nyquist

- Supponiamo di avere un segnale continuo. Il processo di campionamento avviene per un periodo di tempo finito (finestra di campionamento).
- Indichiamo con  $T$  il tempo necessario per digitizzare un dato valore di tensione analogica.
- La frequenza di campionamento  $f_c$  (ovvero il numero di punti che si possono digitizzare in un secondo) è pari all'inverso del tempo  $T$  di digitizzazione.

$$f_c = \frac{1}{T}$$



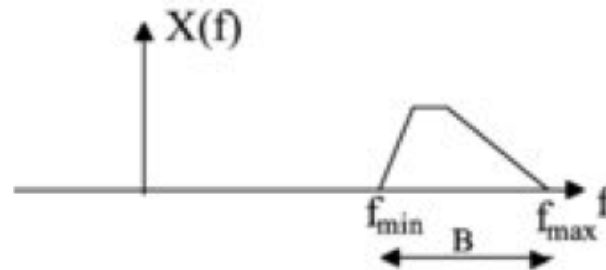
- La frequenza di Nyquist è pari alla metà della frequenza di campionamento:

Frequenza di Nyquist

$$f_N = \frac{f_c}{2}$$

# Teorema di Nyquist-Shannon

- ❑ La frequenza di campionamento necessaria per non perdere informazione è legata allo spettro di frequenza del segnale da convertire, come asserisce il teorema di **Nyquist-Shannon**:
- ❑ “Data una funzione la cui trasformata di Fourier sia nulla al di fuori di un certo intervallo di frequenze (ovvero un segnale a banda limitata), nella sua conversione analogico-digitale la minima frequenza di campionamento necessaria per evitare perdita di informazione nella ricostruzione del segnale analogico ordinario (ovvero nella riconversione digitale-analogica) è pari al doppio delle sua frequenza massima”



Se il segnale ha una banda limitata in frequenza ( $f < f_{MAX}$ ) e si riesce a campionare il segnale ad una frequenza  $f_c > 2 f_{MAX}$ , allora non c'è nessuna perdita di informazione nel processo di campionamento

- ❑ **Se nel segnale sono presenti delle frequenze maggiori della frequenza di Nyquist, allora nel segnale “ricostruito” dal DAC compariranno delle frequenze non presenti nel segnale originario (frequenze ALIAS)**
- ❑ Se il segnale ha uno spettro di frequenze infinito, compariranno necessariamente degli ALIAS che andranno opportunamente filtrati.

# Aliasing

# Aliasing

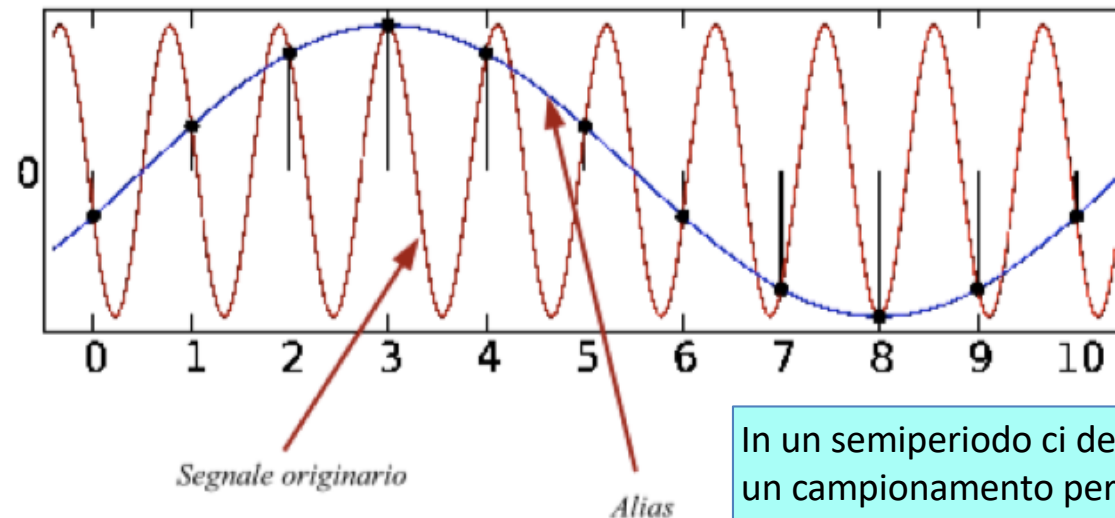
- ❑ Vediamo ora cosa succede se il segnale contiene frequenze superiori alla frequenza di Nyquist.
- ❑ In questo caso avviene il fenomeno dell'**aliasing**, ovvero nel campionamento l'informazione sulle variazioni di alta frequenza sono erronee e nel campione compaiono frequenze inesistenti, i cosiddetti **alias**.
- ❑ Di conseguenza il segnale riconvertito in forma analogica non riproduce fedelmente quello originario.

Per non avere ALIAS

$$f < f_N = \frac{f_c}{2}$$

$$T > T_N = 2 \cdot T_c$$

➔  $T_c < \frac{T}{2}$



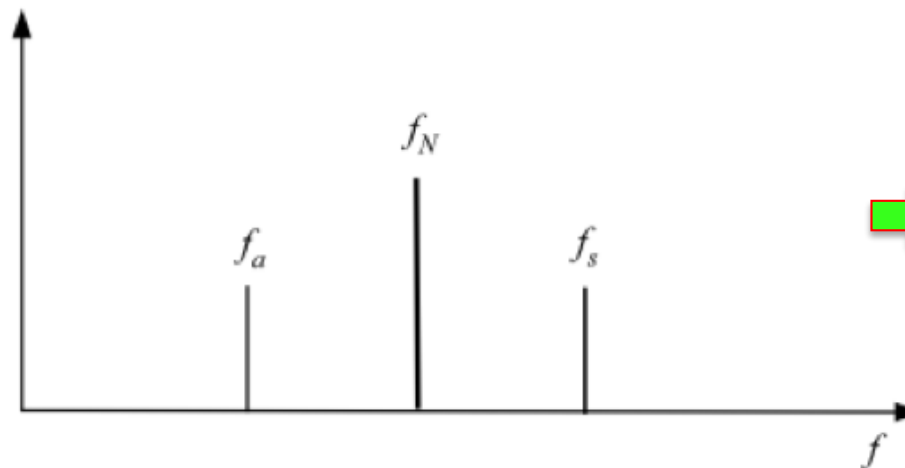
- ❑ Si può comprendere qualitativamente il fenomeno dell'aliasing analizzando cosa succede ad una sinusoide campionata ad intervalli di tempo superiori al semiperiodo della sinusoide stessa.
- ❑ I punti campionati possono essere interpolati anche con una sinusoide di frequenza inferior a quella della sinusoide del segnale originario, quindi nella riconversione in un segnale analogico compariranno entrambe le frequenze.

# Frequenza degli alias

- La frequenza del segnale alias,  $f_a$ , è data dalla differenza (in modulo) tra la frequenza del segnale originario,  $f_s$ , e il multiplo della frequenza di Nyquist,  $f_N$ , immediatamente maggiore:

$$f_N = \frac{f_c}{2}$$

$$f_a = |f_s - N \times f_N|$$



$$f_a = N \times f_N - f_s$$

$$f_a + f_s = N \times f_N$$

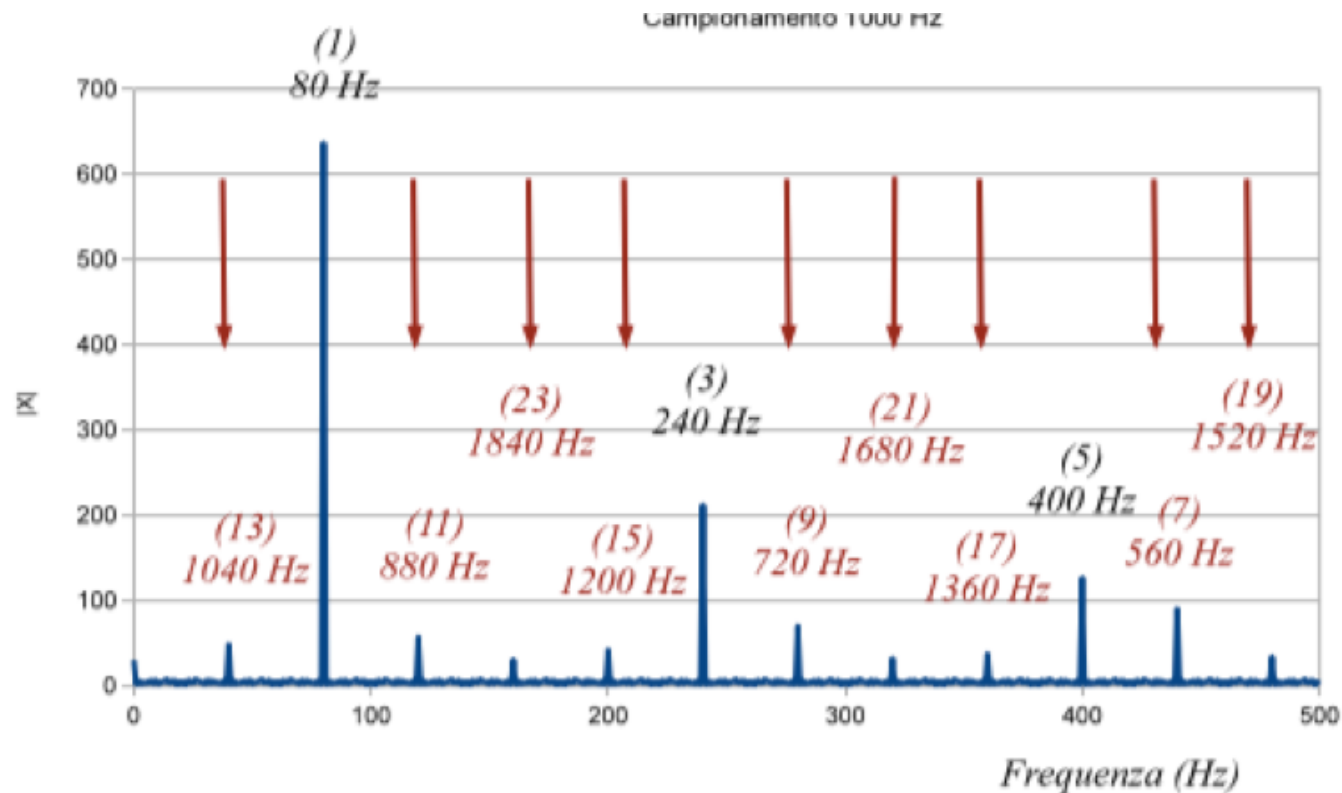
- facciamo un esempio numerico per comprendere meglio questa formula.
- Si ha un campionamento a frequenza  $f_c = 100$  kHz; la frequenza di Nyquist è quindi  $f_N = 50$  kHz. Un segnale sinusoidale con frequenza  $f_s = 51$  kHz produce un alias con frequenza:

$$f_a = |51 - 2 \times 50| = 49 \text{ kHz}$$



# Frequenze di alias di un onda quadra

- Analizziamo ora cosa succede se campioniamo ad esempio alla frequenza  $f_c = 1 \text{ kHz}$  un'onda quadra di frequenza  $f_s = 80 \text{ Hz}$ . Apparentemente non ci sono problemi ma non dimentichiamo che lo sviluppo in serie di un'onda quadra contiene tutte le armoniche dispari della frequenza fondamentale e quindi si avranno anche delle componenti con frequenza superiore a quella di Nyquist  $f_N = 500 \text{ Hz}$  che daranno luogo a degli alias, come si vede in figura.



Le frecce rosse indicano gli alias associati alle armoniche dalla settima (560 Hz) in poi

$$f_a = |f_s - N \times f_N|$$

$$f_a + f_s = N \times f_N$$

- L'unico modo per eliminare il fenomeno dell'aliasing è di introdurre un filtro passa-basso con una frequenza di taglio adeguata, ovvero tale da eliminare, o ridurre sostanzialmente tutte le frequenze superiori alla frequenza di Nyquist. Ovviamente questo produce anche una perdita di informazione.

# Trasformata di Fourier discreta

# Trasformata di Fourier Discreta

- Diamo innanzitutto la definizione **formale** della Trasformata di Fourier Discreta (DFT).
- **Supponiamo di avere un campione di N numeri complessi  $x_k$ ; la DFT li trasforma in altri N numeri complessi  $g_n$  attraverso la relazione seguente:**

$$g_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi k \cdot \frac{n}{N}}$$

- La trasformata di Fourier inversa (IDFT) fa passare dal campione dei  $g_n$  a quello degli  $x_k$ :

$$x_k \equiv \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} g_n \cdot e^{+j2\pi k \cdot \frac{n}{N}}$$

- A parte un fattore di normalizzazione N e il cambio del segno dell'esponente, sostanzialmente la formula è la stessa della trasformata di Fourier "diretta", quindi la stessa "function" può calcolare entrambe le trasformate.
- In realtà gli algoritmi numerici per il calcolo della trasformata non implementano questa formula perché nel caso di N numeri devono fare  $N^2$  operazioni, che possono portare ad avere lunghi tempi di calcolo per N grandi.
- Si implementa quindi una Fast Fourier Transform (FFT) che, sfruttando le simmetrie della funzione, riduce il numero di operazioni a  **$N \times \text{Log}_2(N)$**

Vediamo ora la relazione tra la DFT e la trasformata di Fourier di un segnale analogico continuo

# Trasformata di Fourier discreta

- Ricordiamo come è fatta la trasformata di Fourier per un segnale continuo  $x(t)$ , dove usiamo esplicitamente la frequenza  $f$  e non la pulsazione angolare  $\omega$

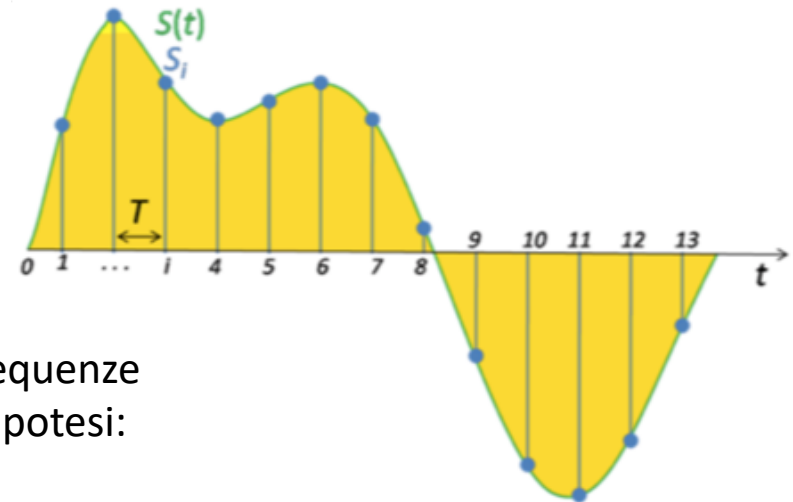
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(f) e^{j2\pi f \cdot t} df$$

$$g(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f \cdot t} dt$$

- Supponiamo ora di campionare il segnale a intervalli di tempo regolari  $T$ , quindi abbiamo:

$$x(t) \rightarrow x_n \equiv x(nT) \quad ; \quad n = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

- L'inverso di  $T$  è la frequenza di campionamento  $f_c$ .
- Il processo di campionamento non può durare un tempo infinito, ma verrà effettuato all'interno di una finestra di campionamento.



- Potremo utilizzare i dati all'interno della finestra per fare la trasformata di Fourier (ovvero per trovare le frequenze che compongono il segnale) se è valida una delle due ipotesi:

- il segnale è nullo al di fuori della finestra;
- in ogni caso il segnale all'interno della finestra è una buona rappresentazione dell'intero segnale (segnale periodico)

# Trasformata di Fourier discreta

- Supponiamo quindi di avere N campioni indipendenti del segnale all'interno della finestra di campionamento, con i quali vogliamo ricavare le frequenze che compongono il segnale originario.
- In linea di principio il numero di frequenze può essere molto grande, al limite infinito, tutte contenute all'interno dell'intervallo:

$$-f_N \rightarrow +f_N ; \text{dove } f_N = \frac{1}{2T} \text{ (frequenza di Nyquist)}$$

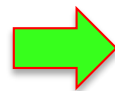
- Ma se partiamo da N misure indipendenti, al più possiamo ottenere N frequenze indipendenti (non si possono aumentare i gradi di libertà della distribuzione con una manipolazione numerica), quindi le stimeremo soltanto per dei valori discreti corrispondenti a:

$$f_n \equiv \frac{n}{NT} ; n = -\frac{N}{2}, \dots, +\frac{N}{2}$$

- I limiti estremi corrispondono al valore inferiore e superiore della frequenza di Nyquist:  $\pm 1/2T$
- Dobbiamo approssimare ora l'integrale continuo della trasformata di Fourier con una somma discreta

$$g(f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f_n t} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi f_n t_k} \cdot T = T \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi \frac{n}{NT} kT}$$

$$t_k \equiv kT$$



$$g(f_n) = T \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$$

Gli  $x_k$  sono gli N campioni del segnale che vogliamo analizzare

# Trasformata di Fourier discreta

$$g(f_n) = T \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi k \cdot \frac{n}{N}}$$



$$g(f_n) = T \cdot g_n$$

$$g_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi k \cdot \frac{n}{N}}$$

**La sommatoria  $g_n$  è la trasformata di Fourier discreta (DFT) dell'insieme degli N punti  $x_k$**

- La DFT mappa N numeri complessi (gli  $x_k$ ) in altri N numeri complessi (i  $g_n$ ), che non dipendono da nessun parametro dimensionale, come l'intervallo di campionamento T.
- La relazione tra la DFT di un insieme di punti campionati della funzione e la relativa trasformata di Fourier della funzione continua di partenza è la seguente:

$$g(f_n) = T \cdot g_n$$

$$f_n \equiv \frac{n}{NT} ; n = -\frac{N}{2}, \dots, +\frac{N}{2}$$

- Da notare che se gli  $x_k$  sono N campioni di un segnale "fisico", essi sono necessariamente tutti reali, quindi se nella trasformata è presente la frequenza f, deve comparire anche la frequenza  $-f$  in modo da cancellare la componente immaginaria nell'antitrasformata nella ricostruzione degli  $x_k$ .
- Ne consegue che le frequenze "indipendenti" stimabili nel campione non sono N, bensì N/2.

- Abbiamo considerato l'insieme n nell'intervallo  $-N/2 \leq n \leq +N/2$ , mentre l'indice k varia da 0 a N-1; questo non è un problema perché l'esponenziale nella sommatoria di  $g_n$  è periodico, con periodo N:

$$g_{-n} = g_{N-n}; n = 1, 2, \dots, N$$

# Trasformata di Fourier discreta

- Vediamo ora come ricavare le frequenze che compongono il segnale analogico di partenza avendo a disposizione i termini  $g_n$  della DFT.

$$g_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$$

- Il termine corrispondente a  $n=0$  è proporzionale al valor medio della funzione.

$$g_0 = \sum_{k=0}^{N-1} x_k = \text{valor medio della funzione (f=0)}$$

- Lo spettro di frequenza è quantizzato:

$$\Delta f = \frac{2 \cdot f_N}{N}$$



$$g_1 = \Delta f ; g_2 = 2 \cdot \Delta f ; \dots ; g_{N/2} = f_N$$

$f_N = \text{frequenza di Nyquist}$

- Il termine  $g_n$  diverso da zero ci dice che la frequenza  $n\Delta f$  è presente nel segnale e la sua ampiezza vale  $T \cdot g_n$ :

- Ricapitolando:

$$n=0 \Rightarrow g_0 = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \quad (f=0)$$

$$1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \Rightarrow 0 < f < f_N$$

$$\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N - 1 \Rightarrow -f_N < f < 0$$

$$n = \frac{N}{2} \Rightarrow f = \pm f_N$$

$n=0$  è la componente continua. Nello spettro di frequenza di un segnale fisico sono rilevanti solo queste frequenze





SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

Fine del capitolo 9