Laboratorio di Segnali e Sistemi
- Capitolo 5 -

Amplificatore Operazionale

Claudio Luci

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

last update : 070117

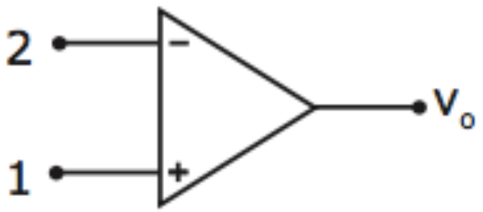
Sommario del capitolo:

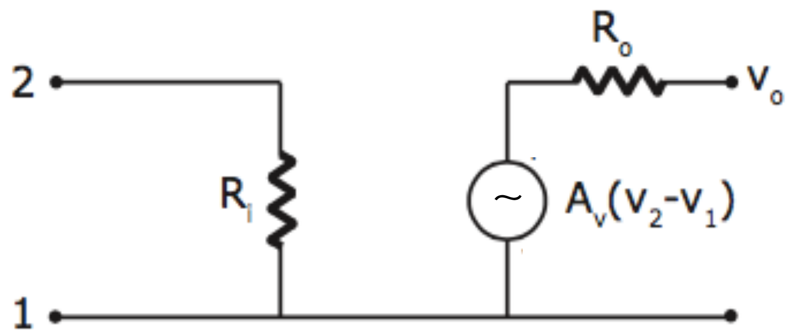
- Introduzione agli amplificatori operazionali
- Amplificatore invertente
- Amplificatore operazione ideale: massa virtuale
- Amplificatore non invertente
- Emitter follower
- Cenni alla reazione negativa
- Risposta in frequenza e compensazione con polo dominante
- Slew rate
- Prodotto guadagno per banda passante
- Circuito derivatore e circuito integratore
- Amplificatore differenziale e CMRR
- Sommatore analogico invertente e non invertente
- Filtri attivi: filtro Sallen-Key e filtro VCVS passa basso, filtro passa banda
- Comparatore

Introduzione agli OP-AMP

Amplificatori Operazionali (OP-AMP)

- Gli amplificatore integrati (comunemente chiamati amplificatori operazionali) sono divenuti ormai, grazie ai progressi nel campo dell'integrazione, uno dei component essenziali dell'elettronica.
- Sono degli amplificatori a molti stadi, accoppiati in continua, quasi sempre con ingresso differenziale (ovvero che amplificano la differenza dei due segnali al suo ingresso) caratterizzati da:
  - **altissima amplificazione di tensione ($10^5 \div 10^6$);**
  - **alta resistenza d'ingresso;**
  - **bassa resistenza d'uscita.**
- Essi sono realizzati su un unico circuito integrato ed il loro costo di produzione ormai molto contenuto fanno sì che vengano usati per svariate applicazioni al posto del corrispondente circuito a transistor.





Simbolo circuitale dell'amplificatore operazionale

1) Ingresso non invertente; 2) ingresso invertente

N.B. non è indicata l'alimentazione (di solito ± V)

L'amplificatore va usato facendo una reazione negativa

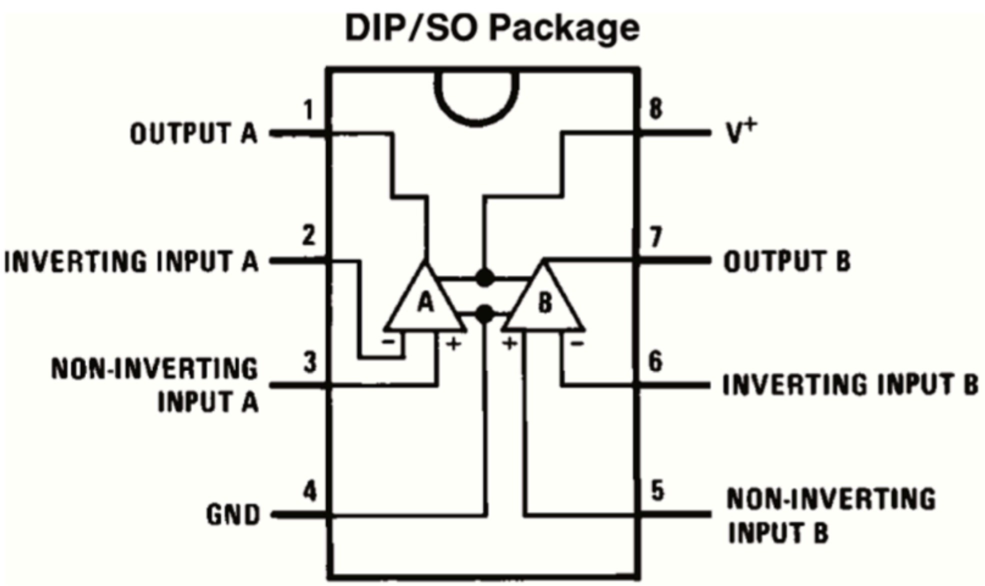
Circuito equivalente

Parametri OP-AMP ideale

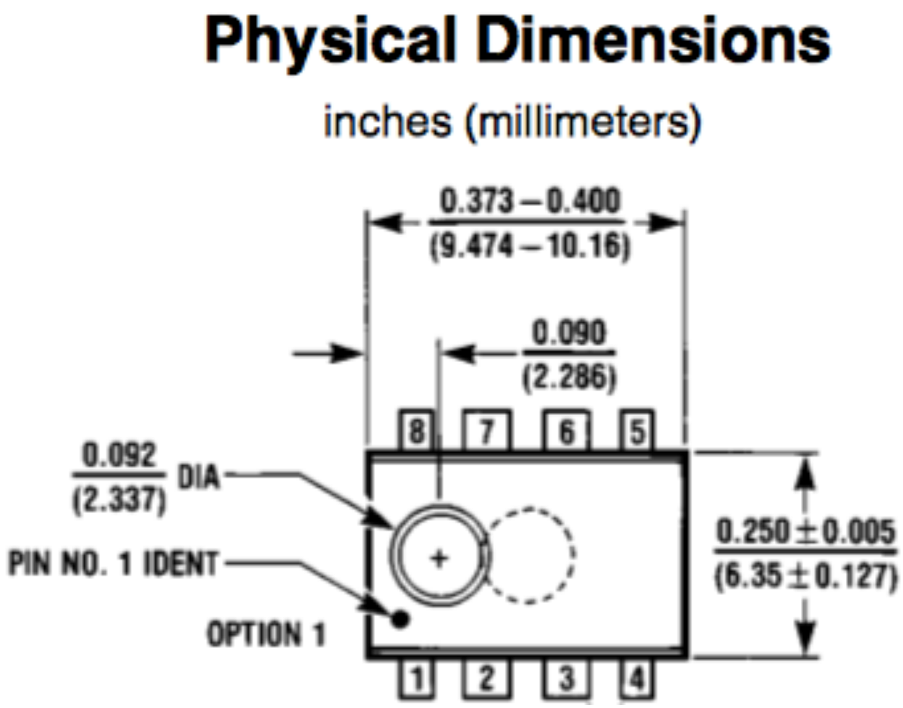
$$\begin{aligned} A_v &= -\infty \\ R_i &= \infty \\ R_o &= 0 \end{aligned}$$

OP-AMP LM358: piedinatura

- In laboratorio utilizzeremo l'amplificatore operazionale LM358. Si tratta di un circuito integrato a 8 piedini che contiene due amplificatori operazionali .
- Questo op-amp può funzionare con alimentazione singola positiva e ground, ma è preferibile usare la doppia alimentazione collegando il negativo sul ground.
- La differenza tra le due tensioni deve essere inferiore a 32 V, quindi ad esempio si può usare ± 12 V.



L'integrato è visto dall'alto

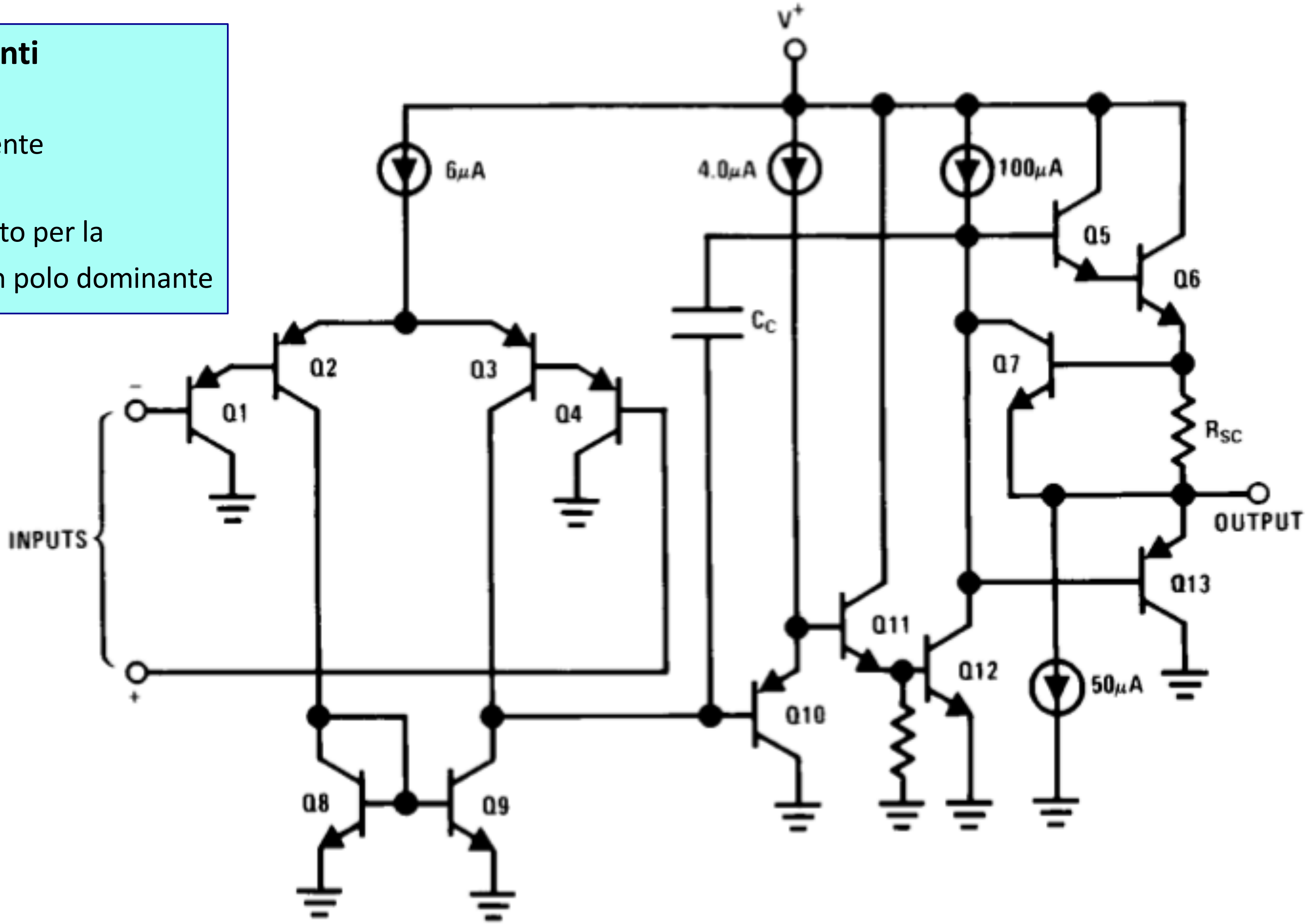


1 cm

OP-AMP LM358: schema del circuito

Schematic Diagram (Each Amplifier)

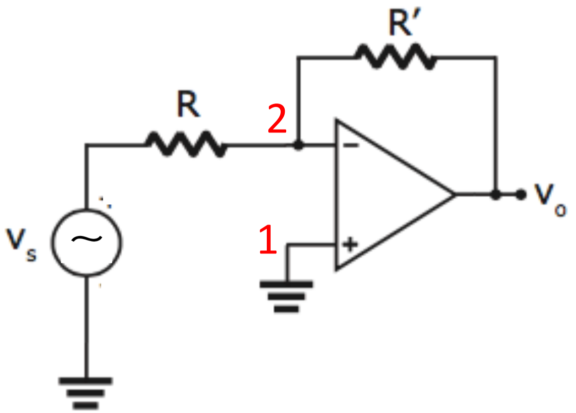
Componenti
12 BJT
4 regolatori di corrente
2 resistenze
1 condensatore usato per la
Compensazione con polo dominante



Amplificatore invertente

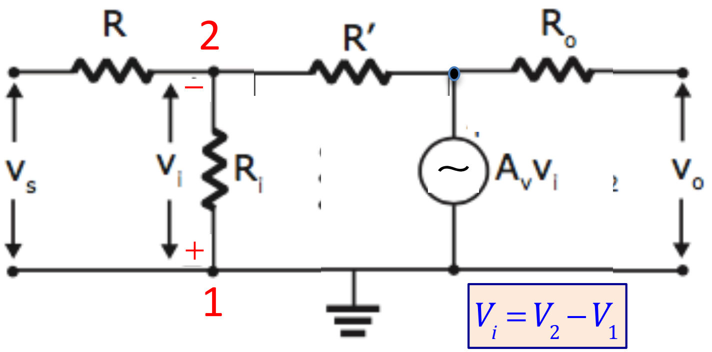
Amplificatore invertente

- Come prima applicazione vediamo un amplificatore invertente (l'equivalente dell'amplificatore CE)

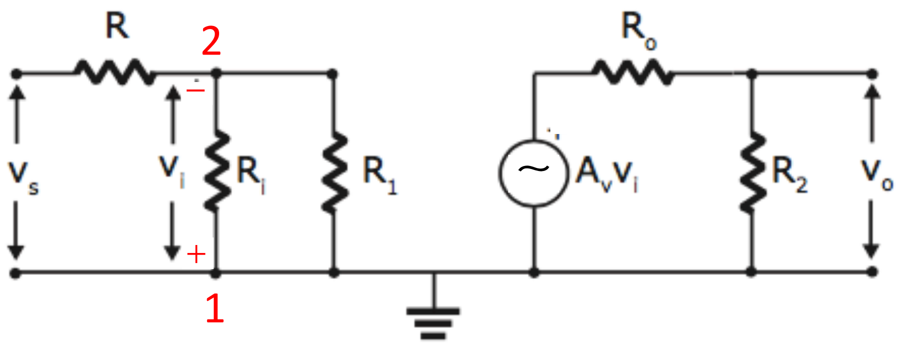


- Il segnale viene mandato sull'ingresso invertente tramite una resistenza R
- L'ingresso non invertente viene collegato a massa
- Il segnale d'uscita viene rimandato sull'ingresso invertente tramite una resistenza R' (reazione negativa)

- Costruiamo il circuito equivalente per ricavare l'amplificazione



Miller



$$R_1 = \frac{R'}{1 - A_v}$$

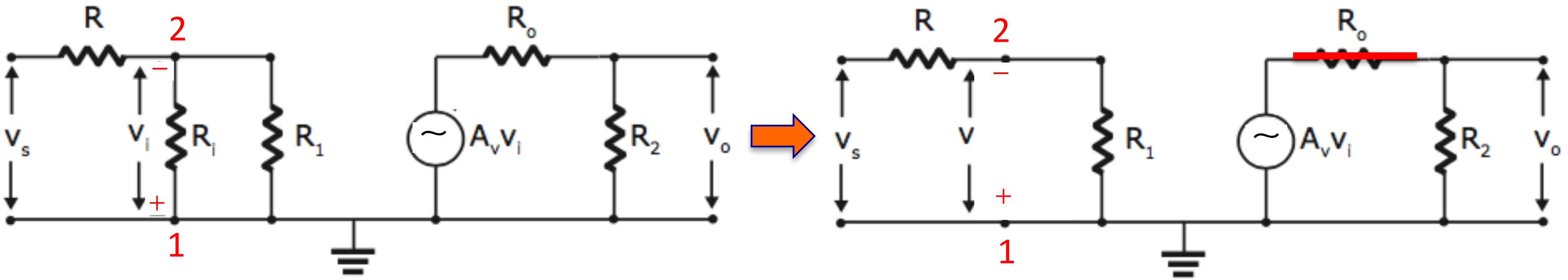
$$R_2 = \frac{R'}{1 - \frac{1}{A_v}}$$

dato che A_V è molto grande → R_1 piccola ; $R_2 \to R'$

$R_1 \ll R_I$; $R_2 \gg R_{out}$

Amplificatore invertente

- Il circuito equivalente può essere modificato nel modo seguente:



- Ricaviamo l'amplificazione sapendo che A_V è molto grande:

$$\begin{aligned} v_o &= A_v(v_2 - v_1) = A_v v_2 \\ v_2 &= \frac{R_1}{R + R_1} v_s \end{aligned}$$

$$A_{vf} \equiv \frac{v_o}{v_s} = A_v \frac{R_1}{R + R_1} = A_v \frac{\dfrac{R'}{1 - A_v}}{R + \dfrac{R'}{1 - A_v}} \simeq -\frac{R'}{R}$$

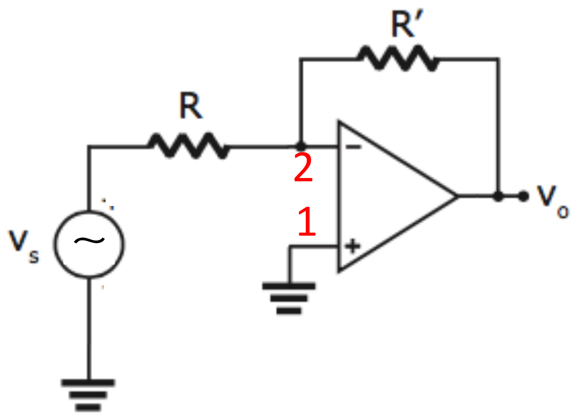
- Da notare che nel limite di A_V che tende all'infinito, la resistenza R_1 tende a zero, quindi il potenziale del punto 2 (ingresso invertente) diventa uguale a zero. Si dice che l'ingresso invertente ha **una massa virtuale**;
- In sostanza la presenza della resistenza di reazione R' obbliga i due ingressi dell'operazionale a portarsi allo stesso potenziale: qualunque tentativo noi facciamo di variare in un senso o nell'altro la tensione dell'ingresso 2, provoca una reazione opposta che, attraverso la resistenza R', riporta il terminale dell'ingresso 2 allo stato di partenza.

Amplificatore invertente: massa virtuale

- **Ricalcoliamo di nuovo l'amplificazione usando il metodo della massa virtuale:**

1. la tensione v_2 (ingresso $(-)$) e' uguale alla tensione v_1 (ingresso $(+)$), cioe', nel caso in esame, pari a zero;

2. non entra corrente nell'operazionale (perche' la resistenza d'ingresso e' molto elevata), quindi la corrente i_s che circola in R e' la stessa che circola in R'.



- Imponiamo quindi che la corrente che scorre in R sia uguale alla corrente che scorre in R' (il verso non importa):

$$\frac{(v_s - 0)}{R} = \frac{(0 - v_0)}{R'}$$
$$\frac{v_s}{R} = \frac{-v_0}{R'}$$

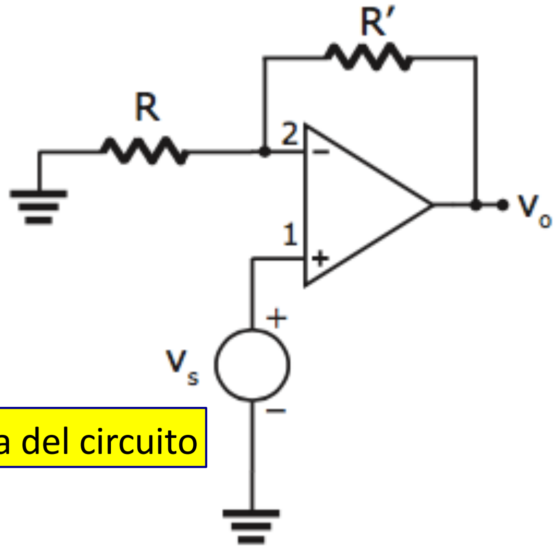
$$\boxed{\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R'}{R}}$$

- **Riassumendo, nel caso di amplificatore operazionale ideale ($A_V \rightarrow \infty$; $R_{IN} \rightarrow \infty$) abbiamo:**
  1) **le tensioni dei due ingressi sono uguali;**
  2) **nell'operazionale non entra corrente.**
- **Queste due approssimazioni le useremo per risolvere tutti gli esercizi, tuttavia ci sono delle applicazioni in cui andrà trattato l'amplificatore reale senza l'ausilio delle approssimazioni.**

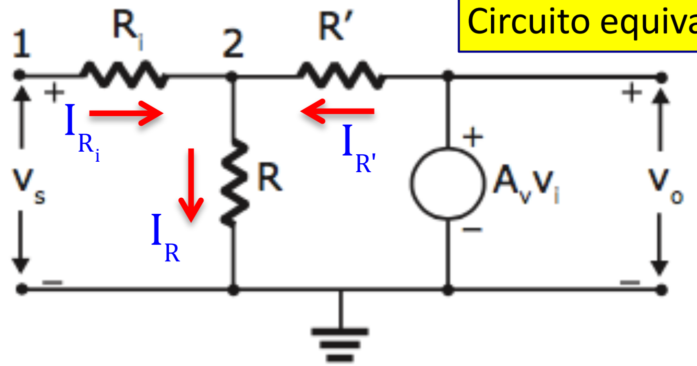
Amplificatore non invertente

Amplificatore non invertente

- Vediamo ora come si realizza un amplificatore non invertente:



Schema del circuito



Circuito equivalente

1) la resistenza interna R_i connette l'ingresso invertente (2) con l'ingresso non invertente (1)
2) Il segnale e' mandato sull'ingresso non invertente (1)

- Ricaviamo l'amplificazione del circuito usando il circuito equivalente. V_i è uguale a:

$$\boxed{v_i = v_2 - v_1 = v_2 - v_s}$$

- Applichiamo la legge dei nodi al nodo 2 (usiamo i versi delle correnti riportati in figura):

$$\frac{v_2}{R} = \frac{v_o - v_2}{R'} + \frac{v_s - v_2}{R_i} \Rightarrow v_2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_i}\right) = \frac{v_o}{R'} + \frac{v_s}{R_i}$$

- sfruttiamo il fatto che R_i è molto grande ($R_i \rightarrow \infty$): $\Rightarrow$ $\boxed{v_2 = \frac{R}{R + R'} v_o}$

Partitore di tensione
(se $R_i = \infty$ l'OP-AMP non assorbe corrente)

Amplificatore non invertente

- Ricaviamo la tensione d'uscita in funzione del segnale d'ingresso V_S:

$$\boxed{v_o = A_v v_i = A_v v_2 - A_v v_s}$$

(ricordiamo che $v_i = v_2 - v_1 = v_2 - v_s$)

- Utilizzando il valore di V_2 ricavato in precedenza si ha: $\boxed{v_o = \frac{R}{R+R'} A_v v_o - A_v v_s}$

- Da questa espressione ricaviamo l'amplificazione:

$$\boxed{A_{vf} \equiv \frac{v_o}{v_s} = \frac{A_v}{\frac{R}{R+R'} A_v - 1}}$$

- Nel limite $A_V \rightarrow \infty$ si ha: $\boxed{A_{vf} \simeq \frac{R+R'}{R}}$

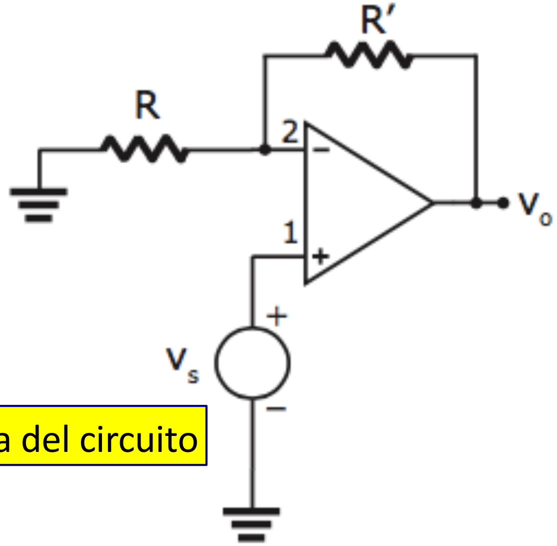
- Si noti che nel limite $A_V \rightarrow \infty$ i due ingressi si trovano allo stesso potenziale:

$$\boxed{\frac{v_2}{v_s} = \frac{v_2}{v_o} \frac{v_o}{v_s} = \frac{R}{R+R'} \frac{R+R'}{R} = 1}$$

$$\boxed{v_2 = \frac{R}{R+R'} v_o}$$

Amplificatore non inv. : massa virtuale

- Proviamo a ricavare di nuovo l'amplificazione utilizzando il "trucchetto" della massa virtuale.



Schema del circuito

Assunzioni del metodo

1) **le tensioni dei due ingressi sono uguali;**
2) **nell'operazionale non entra corrente.**

- Ipotesi 2): nell'amplificatore non entra corrente, quindi la tensione dell'ingresso invertente (punto 2) è data dal partitore R' – R (rete di reazione):

$$v_2 = \frac{R}{R+R'} v_o$$

- Ipotesi 1) Il potenziale dei due ingressi è lo stesso; dato che il potenziale di V_1 è proprio uguale al segnale d'ingresso V_S, anche V_2 sarà uguale a V_S, di conseguenza abbiamo:

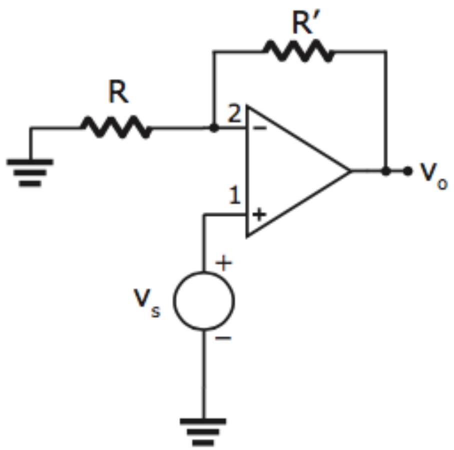
$$v_2 = v_S \quad \Rightarrow \quad v_S = \frac{R}{R+R'} \cdot v_o$$

$$A_V = \frac{v_o}{v_S} = \frac{R+R'}{R}$$

Emitter Follower

OP-AMP: emitter follower

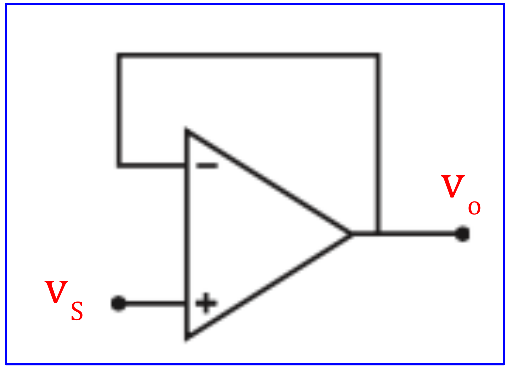
- Proviamo ora a realizzare un inseguitore di emettitore con l'amplificatore operazionale. Partiamo dalla formula dell'amplificazione dell'amplificatore non invertente:



$$A_V = \frac{V_o}{V_S} = \frac{R+R'}{R}$$

$$\text{se } R \gg R' \quad \Rightarrow \quad A_V = 1$$

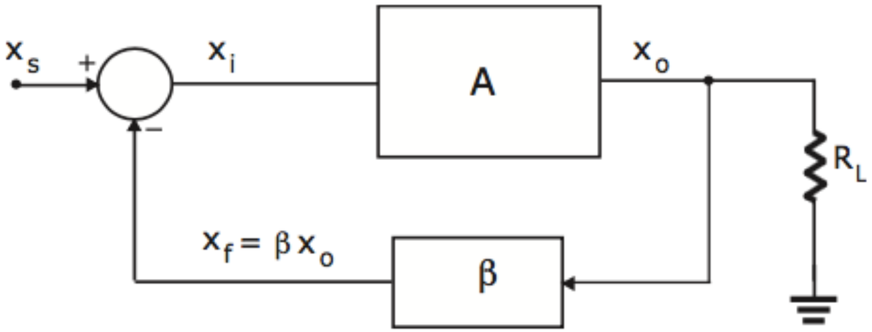
- La scelta più semplice è mettere R' = 0 e R = ∞ (circuito aperto). Di conseguenza il circuito più semplice per realizzare l'emitter follower è il seguente:



Reazione negativa

Cenni alla reazione negativa

- Per migliorare la stabilità degli amplificatori e fare in modo che le loro prestazioni siano indipendenti dalle variazioni di parametri esterni, quali la temperatura, o da parametri individuali dei singoli transistor, si introduce nel circuito una reazione negativa (o controreazione), vale a dire si riporta in ingresso parte (o tutto) del segnale d'uscita che si somma (algebricamente) al segnale del generatore.



A: amplificatore non reazionato
β: rete di reazione

Il segnale di reazione può essere di corrente o di tensione

- Ricaviamo il valore dell'amplificazione con reazione. Si noti che il valore del segnale reazionato si sottrae a quello del generatore d'ingresso:

$$\begin{aligned} x_i &= x_s - x_f \\ &= x_s - \beta x_o \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A_f = \frac{x_o}{x_s} = \frac{x_o}{x_i + \beta x_o} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_f = \frac{A}{1 + \beta A}}$$

- Nell'ultimo passaggio abbiamo diviso numeratore e denominatore per x_i.
- L'amplificazione "reazionata" è diminuita però abbiamo guadagnato in stabilità perché se $\beta A >> 1$ l'amplificazione dipende solo dalla rete di reazione β

$$\boxed{A_f \simeq \frac{1}{\beta}}$$

Risposta in frequenza

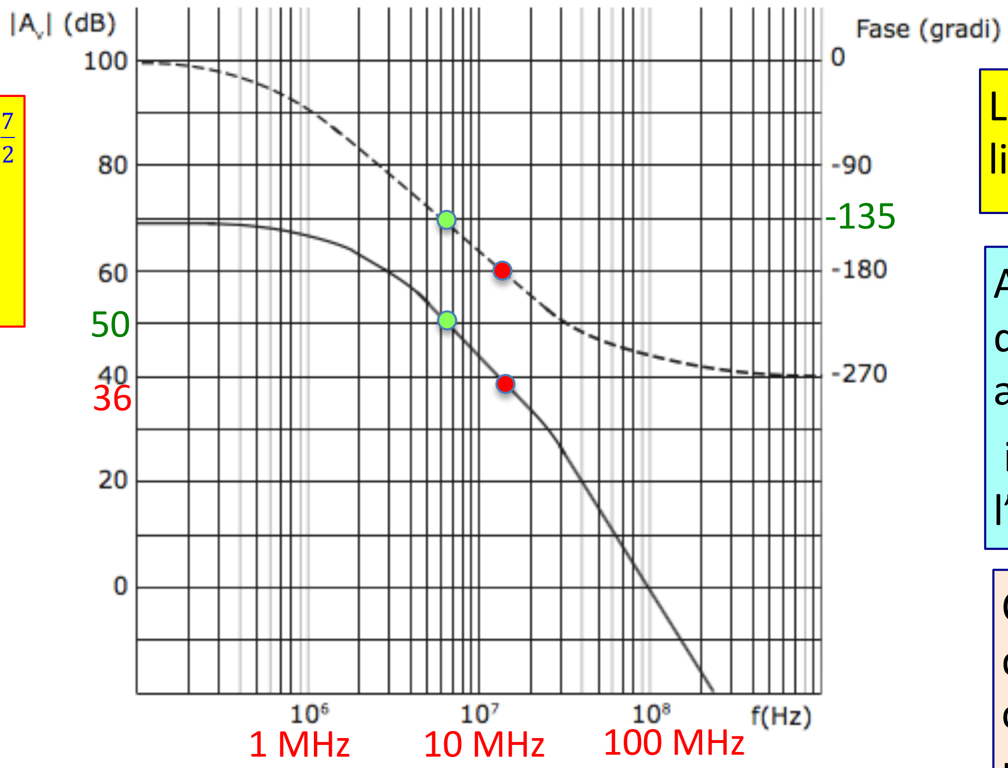
OP-AMP: risposta in frequenza

- Gli amplificatori operazionali reali hanno una banda passante finita. Gli accoppiamenti in continua consentono effettivamente l'amplificazione fino a frequenza zero, ma le capacità parassite dei molti transistor presenti nel circuito integrato ne limitano il funzionamento alle alte frequenze.
- L'andamento della funzione di trasferimento ad alte frequenze è dominato dalla presenza di numerosi poli che ne riducono l'ampiezza e aumentano lo sfasamento del segnale.
- Il diagramma di Bode potrebbe avere l'andamento seguente:

$$70 = 20 \cdot \log_{10} 10^{\frac{7}{2}}$$
$$\Rightarrow A = 10^3 \cdot \sqrt{10}$$
$$\Rightarrow A = 3162$$

50 dB = 316

36 dB = 63



Linea continua: modulo
linea tratteggiata: fase

A circa 12 MHz lo sfasamento diventa di 180°, che si aggiunge ai 180° canonici di un amplificatore invertente. A questa frequenza l'amplificazione vale 36 dB.

Questo crea grossi problemi di stabilità in un amplificatore che funzioni con reazione negativa

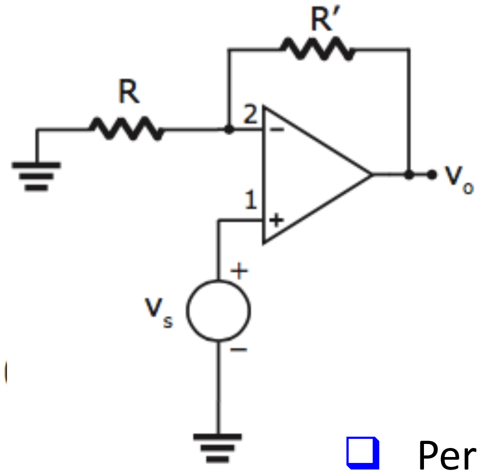
OP-AMP: risposta in frequenza

- Ricordiamo che la funzione di trasferimento dell'amplificazione operazionale con una rete di reazione sull'ingresso invertente è di questo tipo, dove β è un numero positivo:

$$A_{vf} = \frac{A}{1+\beta A}$$

- Se lo sfasamento è uguale a 180°, β diviene negativo.
- Se esiste nel segnale (o nel rumore) una frequenza tale che βA = -1, l'amplificatore si comporta come un'oscillatore.

- Facciamo un esempio quantitativo con un amplificatore non invertente la cui amplificazione segua l'andamento in frequenza mostrato in precedenza:



$$\beta = \frac{R}{R+R'} \quad \Rightarrow \quad A_{Vf} = \frac{A_V}{1+\frac{R}{R+R'}A_V}$$

- Nel nostro esempio l'amplificazione a 12 MHz vale 36 dB (A_V=63), quindi:

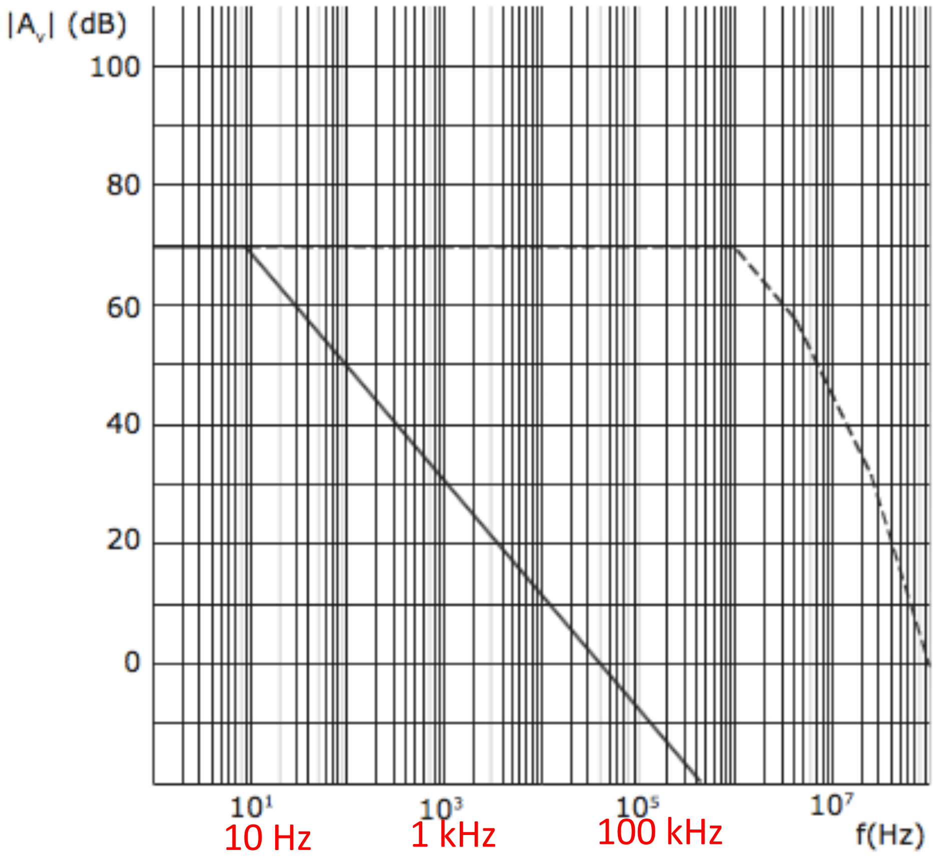
oscilla se $\frac{R}{R+R'}|A_V| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{R+R'}{R} = 63$

- Per evitare oscillazioni, l'amplificazione "reazionata" deve essere maggiore di 63

- In realtà per evitare "rischi" di oscillazioni, si preferisce avere un margine di 45° intorno a 180°, quindi si considera l'amplificazione ad uno sfasamento di -135°. Nel diagramma precedente si ha un amplificazione di 316 per questo angolo, quindi l'amplificazione deve essere maggiore di 316
- Per sopperire a questo problema si introducono all'interno dell'OP-AMP delle reti RC ad hoc per modificare (compensare) l'andamento del modulo e della fase dell'amplificatore operazionale.

compensazione con polo dominante

- Si aggiunge una capacità tra l'ingresso e l'uscita di uno degli stadi di amplificazione. L'effetto Miller provvede a moltiplicare questa capacità per un grosso fattore, introducendo quindi un polo a frequenza molto bassa (≈ 10 Hz).
- La rotazione di fase arriva ora a 180° quando il modulo di A_V è molto inferiore ad uno, eliminando ogni pericolo di instabilità
- Il diagramma di Bode dell'amplificatore non reazionato diventa allora:



Linea continua: OP-AMP con polo dominante
linea tratteggiata: senza polo dominante

La banda passante dell'amplificatore sembra essere diventata molto piccola, ma in realtà siamo in presenza di una rezione negativa che aumenta la banda passante. Si ricordi che il prodotto banda-guadagno è costante.

Se il guadagno ad anello aperto è 10^5 e la banda passante è 10 Hz, allora si ha un prodotto banda-guadagno di 10^6. Quindi un amplificatore che amplifichi 10 ha una banda di 100 kHz.

Slew-rate

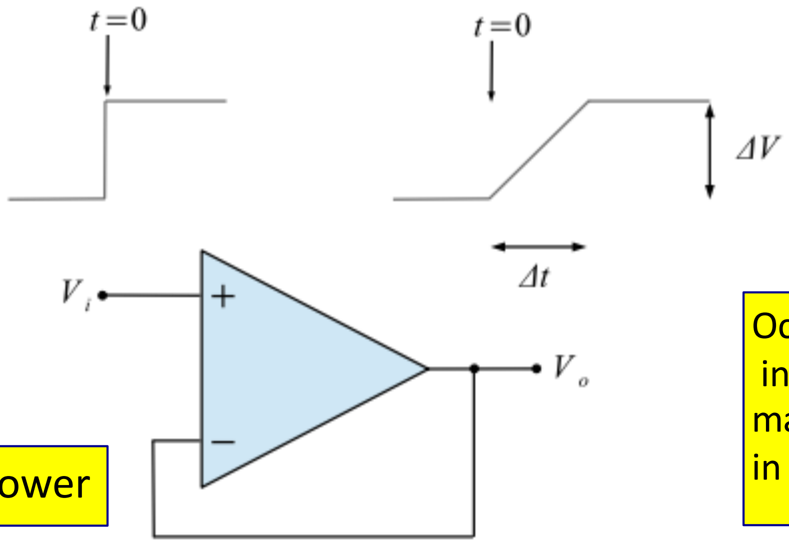
OP-AMP: slew rate

- È una misura della velocità di risposta dell'operazionale al variare del segnale di ingresso:

$$S = \left| \frac{dv_o}{dt} \right|_{max}$$

LM358: S= 0.5 V / µs

- Un op-amp ideale dovrebbe avere lo slew-rate infinito (l'uscita riproduce instanteamente l'ingresso)



$$S = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Emitter follower

Occorre tener conto dello slew-rate non solo quando in ingresso è presente un segnale a gradino, ma per qualunque segnale variabile nel tempo; in particolare quando dobbiamo farne la derivata.

- segnale sinusoidale: $V_i = V_p \sin\omega t \;\Rightarrow\; V_u = A \cdot V_p \sin\omega t$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV_u}{dt} = A \cdot V_p \cdot \omega \sin\omega t \quad \Rightarrow \quad S = \left(\frac{dV_u}{dt} \right)_{MAX} \geq A \cdot V_p \cdot \omega$$

Se non si rispetta la disuguaglianza il segnale d'uscita sarà distorto

OP-AMP: "uso" dello slew-rate

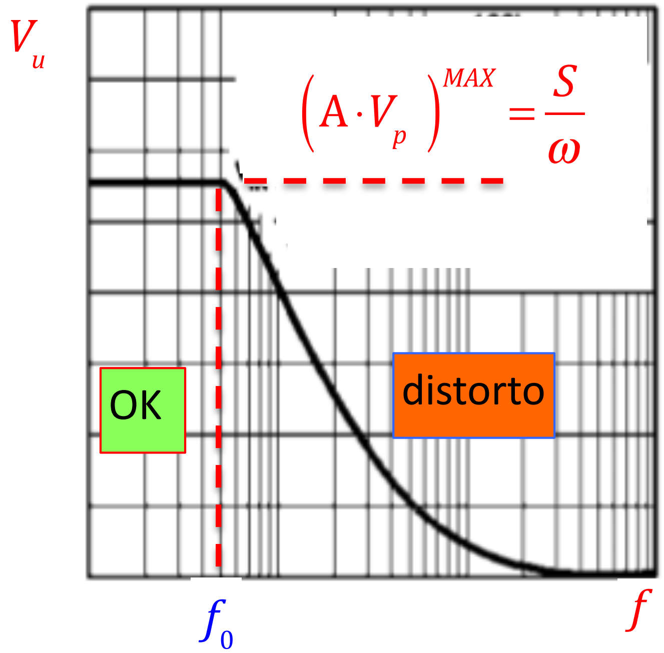
- Nel caso di un segnale sinusoidale, abbiamo visto che deve valere la disuguaglianza:

$$S = \left(\frac{dV_u}{dt}\right)_{MAX} \geq A \cdot V_p \cdot \omega$$

- Di conseguenza il segnale d'uscita deve soddisfare la disuguaglianza seguente per non avere distorsioni:

$$A \cdot V_p \equiv V_u \leq \frac{S}{\omega} \Rightarrow f \leq f_0 = \frac{S}{2\pi \cdot A \cdot V_p}$$

- Tale limite può dar luogo al grafico seguente del segnale d'uscita in funzione della frequenza:



Esempio numerico

S=0.5 V/μs ; V_p=0.5 V ; A=10

$$f_0 = \frac{5 \cdot 10^5}{2\pi \times 10 \times 0.5} \simeq 15 \text{ kHz}$$

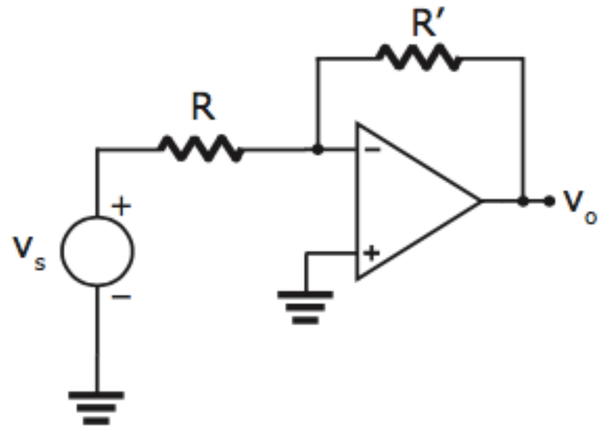
f_0 deve essere minore della frequenza di taglio dell'amplificatore

Prodotto Guadagno per Banda Passante (GBW)

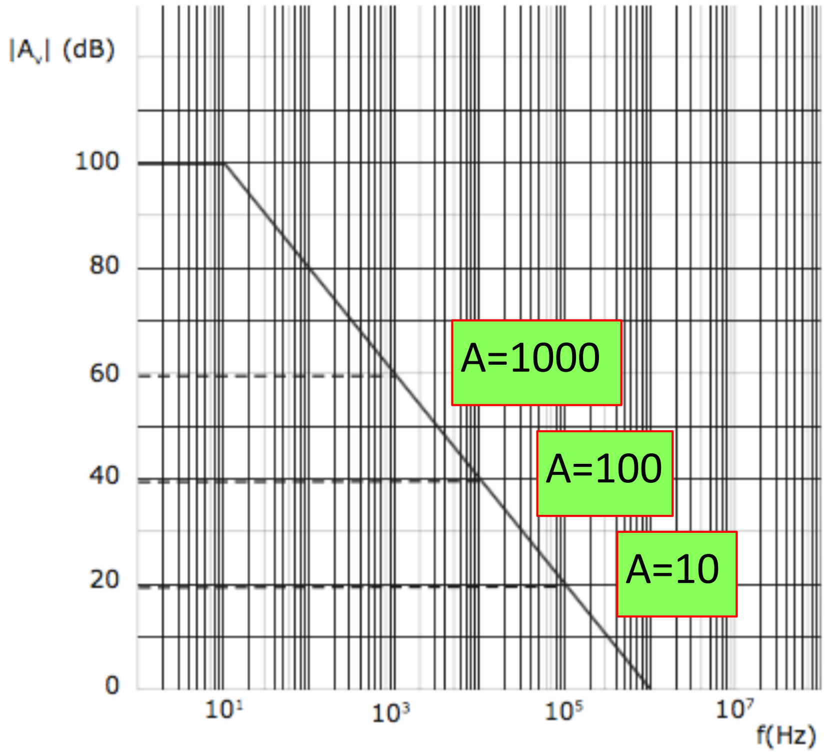
OP-AMP: prodotto guadagno x banda passante

- Analizziamo la risposta in frequenza di un amplificatore operazionale invertente;
- L'amplificazione dipende solo dalla rete di reazione

$$\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R'}{R}$$



- Tuttavia in un amplificatore reale la banda passante non è infinita ma segue l'andamento mostrato in figura per l'operazionale LM358 che ha un guadagno ad anello aperto di 10^5



Il prodotto del guadagno per la banda passante dell'amplificatore (Gain BandWidth Product [GBW]) è costante; quindi noto il GBW e fissata l'amplificazione si può ricavare la banda passante

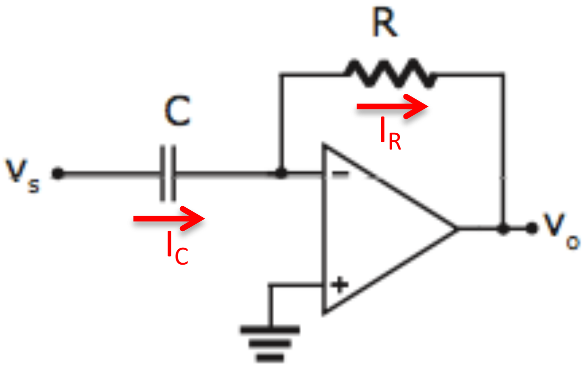
Nota per la scelta delle resistenze

Sebbene l'amplificazione dipenda solo dal rapporto tra le due resistenze, è bene che queste siano in un range intermedio di resistenze (1÷100 kΩ). L'amplificatore non può erogare correnti elevate, quindi le due resistenze non possono essere troppo basse. D'altra parte resistenze troppo elevate non sarebbero più trascurabili rispetto alla resistenza d'ingresso dell'amplificatore operazionale.

Derivatore e Integratore

OP-AMP: circuito derivatore

- L'amplificatore operazionale può essere usato per realizzare un circuito derivatore oppure integratore. Vediamo ora il derivatore:



Ricordiamo

1) le tensioni dei due ingressi sono uguali;
2) nell'operazionale non entra corrente.

$$\Rightarrow \quad V_- = V_+ = 0 \quad ; \quad I_C = I_R$$

- Ricaviamo V_o in funzione di V_s:

$$V_S - 0 = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{dV_S}{dt} = \frac{I_C}{C} \Rightarrow I_C = C\frac{dV_S}{dt}$$

$$I_R = \frac{0 - V_o}{R} = -\frac{V_o}{R}$$

$$I_C = I_R \Rightarrow C\frac{dV_S}{dt} = -\frac{V_o}{R} \Rightarrow V_o = -RC\cdot\frac{dV_S}{dt}$$

- Esempio: segnale sinusoidale $V_s = V_p \sin\omega t$

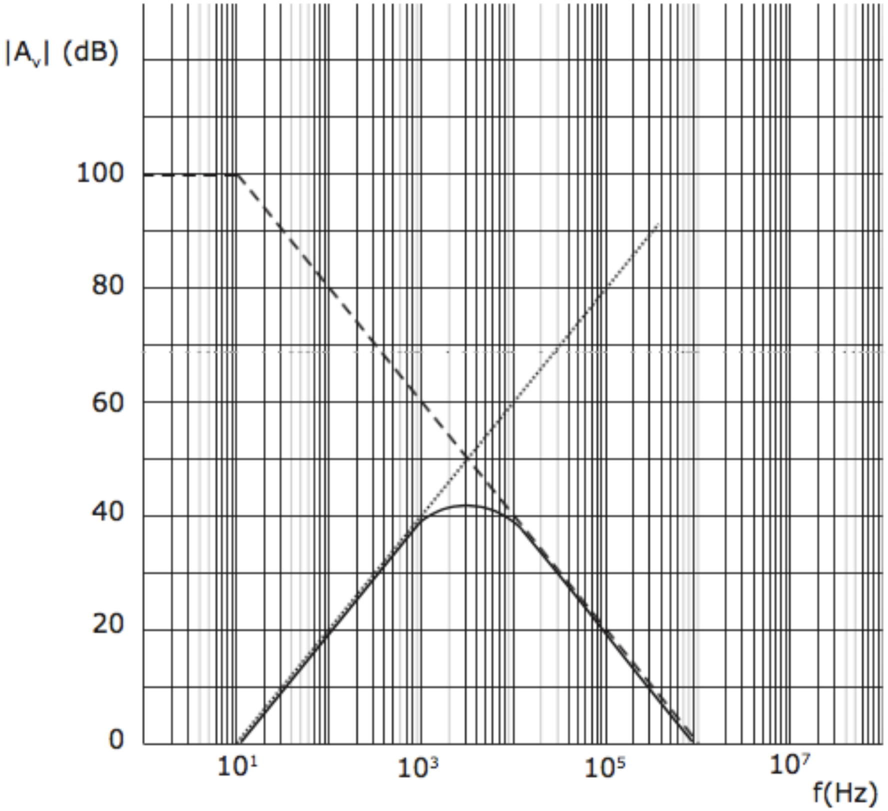
$$\Rightarrow \quad V_o = -RC\cdot\frac{dV_S}{dt} = -RC\cdot\omega\cdot V_p\cos\omega t = RC\cdot\omega\cdot V_p\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Notare che: $\dfrac{|V_o|}{|V_s|} \equiv |A_v| = RC\cdot\omega$

L'amplificazione sembra divergere ad alte frequenze, il che è impossibile; vediamo quindi come si comporta un circuito derivatore fatto con un op-amp reale.

OP-AMP: circuito derivatore reale

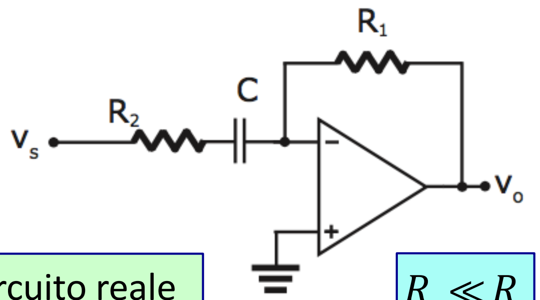
- Vediamo il diagramma di Bode di un circuito derivatore reale:



Linea tratteggiata: funzione di trasferimento di un op-amp reale con polo dominante a 10 Hz
Linea punteggiata: derivatore ideale
Linea continua: derivatore reale con RC=10^{-4} s

Un derivatore reale si comporta come uno reale finché la sua dinamica rimane al di sotto della funzione di trasferimento dell'op-amp ad anello aperto (senza controreazione)

$$\frac{|V_o|}{|V_s|} \equiv |A_v| = RC \cdot \omega$$



circuito reale

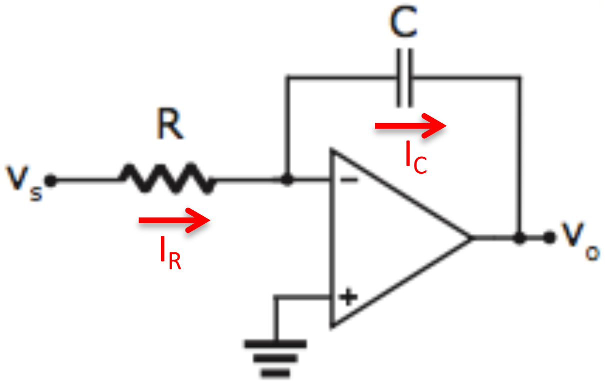
$R_2 \ll R_1$

- Nel circuito reale si mette una resistenza R_2 in serie al condensatore per "proteggere" il circuito dai transienti, caratterizzati da frequenze molte alte, infatti:

$$A = \frac{R_1}{1/j\omega C} \Rightarrow A = \frac{R_1}{R_2 + 1/j\omega C}$$

OP-AMP: circuito integratore

- vediamo ora il circuito integratore:



Ricordiamo

1) le tensioni dei due ingressi sono uguali;
2) nell'operazionale non entra corrente.

$$\Rightarrow \quad V_- = V_+ = 0 \quad ; \quad I_C = I_R$$

- Ricaviamo V_o in funzione di V_s:

$$I_R = \frac{V_s - 0}{R} = \frac{V_s}{R}$$

$$0 - V_o = \frac{q}{C} = \frac{\int_0^t I_c\,dt'}{C} \Rightarrow V_o = -\frac{1}{C}\cdot\int_0^t I_c\,dt'$$

$$I_C = I_R \Rightarrow V_o = -\frac{1}{C}\cdot\int_0^t I_s\,dt'$$

$$\Rightarrow \quad V_o = -\frac{1}{RC}\cdot\int_0^t V_s\,dt'$$

- Esempio: segnale sinusoidale $V_s = V_p \sin\omega t$

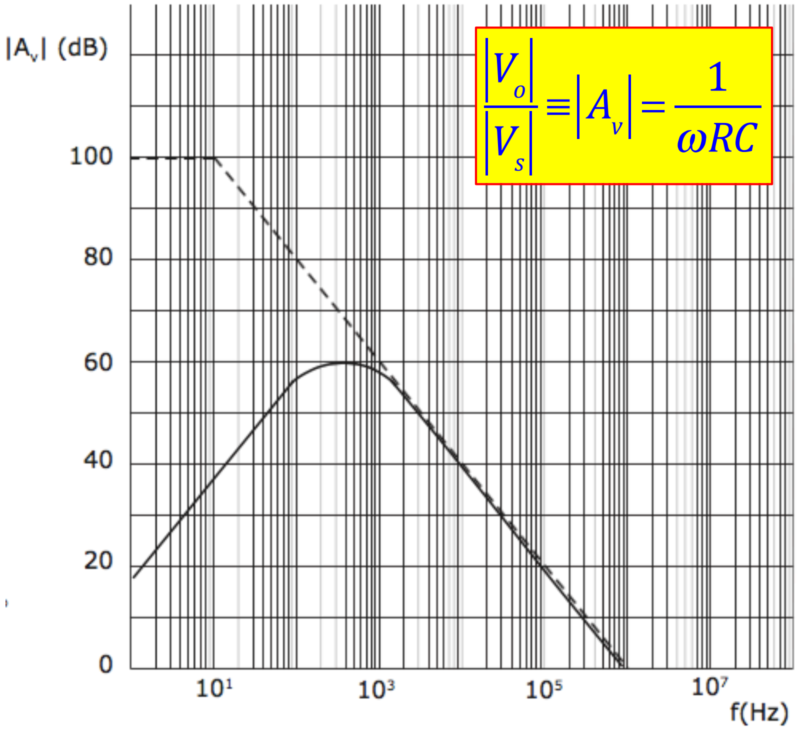
$$\Rightarrow \quad V_o = -\frac{1}{RC}\cdot V_p\int_0^t \sin\omega t'\,dt' = \frac{V_p}{\omega RC}\cdot\cos\omega t = \frac{V_p}{\omega RC}\cdot\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Notare che: $\dfrac{|V_o|}{|V_s|} \equiv |A_v| = \dfrac{1}{\omega RC}$

L'amplificazione diverge a frequenze basse. Questo accade perché il condensatore si carica integrando la piccola componente continua presente in ingresso → occorre modificare il circuito

OP-AMP: circuito integratore reale

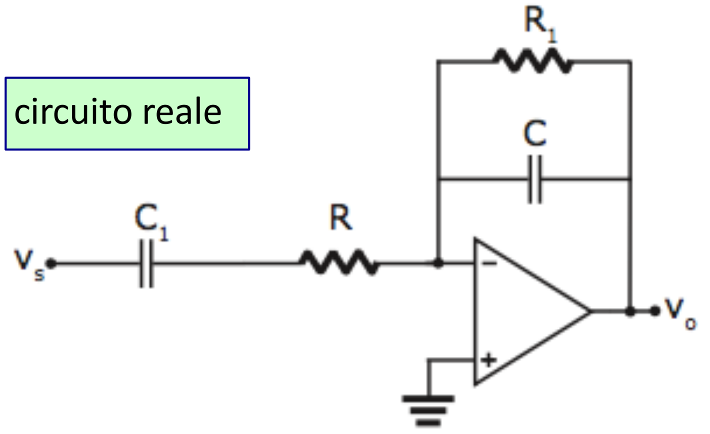
- Vediamo il diagramma di Bode di un circuito integratore reale modificato:



$$\frac{|V_o|}{|V_s|} \equiv |A_v| = \frac{1}{\omega RC}$$

Linea tratteggiata: funzione di trasferimento di un op-amp reale con polo dominante a 10 Hz
Linea continua: integratore reale con RC=10^{-6} s realizzato con C_1=1 μF e R_1=10 MΩ

circuito reale



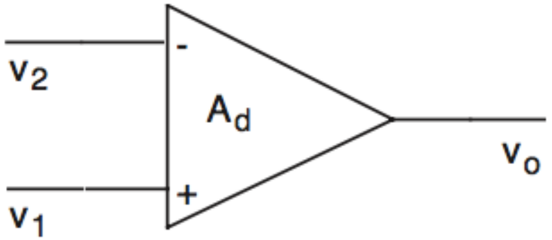
- La componente continua presente in ingresso può essere bloccata inserendo il condensatore C_1;
- a questo punto però non ci sarebbe un percorso per la corrente continua di ingresso I_{b2} ed è necessario aggiungere una resistenza R_1 in parallelo a C;
- Il circuito è ora simultaneamente un derivatore ed un integratore; quindi occorre che l'effetto derivante sia trascurabile, per cui si devono rispettare le condizioni seguenti, dove T è il periodo del segnale che si vuole trattare:

$$\text{Integratore: } R_1 \gg R \; ; C_1 \gg C \; ; \; R_1 C_1 \gg T$$

Amplificatore differenziale

OP-AMP: Amplificatore differenziale

- L'amplificatore differenziale è un dispositivo a due ingressi dove l'uscita è proporzionale alla differenza dei segnali presenti all'ingresso:



$$v_o = A_d(v_1 - v_2)$$

A_d = amplificazione differenziale

- Internamente il dispositivo è composto da due canali separati che amplificano i segnali presenti sui due ingressi, quindi si può scrivere:

$$v_o = A_1 v_1 + A_2 v_2$$

dove A_1 e A_2 sono le amplificazioni dei singoli canali

- introduciamo ora due nuove variabili, il segnale differenziale v_d e il segnale comune v_c:

$$v_c = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \qquad v_d = (v_1 - v_2) \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_c + \frac{1}{2}v_d \qquad v_2 = v_c - \frac{1}{2}v_d$$

- quindi il segnale d'uscita è uguale a: $v_o = A_d v_d + A_c v_c$

- dove possiamo definire l'amplificazione differenziale $\mathbf{A_d}$ e l'amplificazione di modo comune $\mathbf{A_c}$:

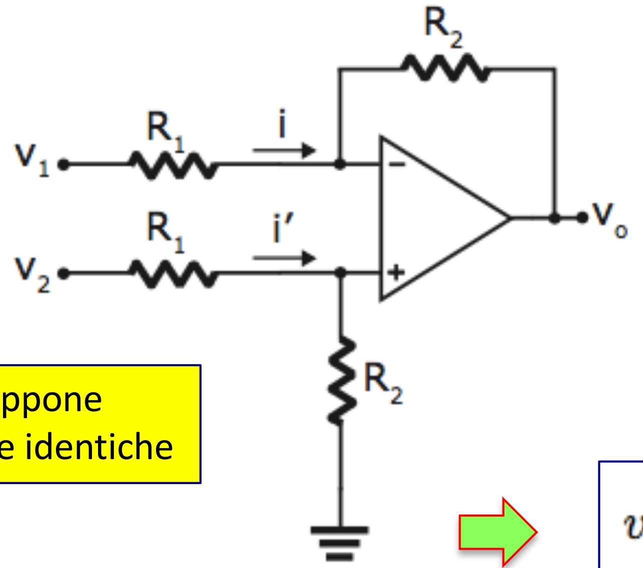
$$A_d = \frac{1}{2}(A_1 - A_2) \qquad A_c = (A_1 + A_2)$$

- In un amplificatore ideale $\mathbf{A_1 = -A_2 \rightarrow A_c = 0}$ e $\mathbf{A_d \neq 0}$. Per misurare quanto un amplificatore reale si avvicini ad uno ideale, si introduce il **Common Mode Rejection Ratio [CMRR]** (ρ) che in un amplificatore ideale vale infinito:

$$\rho = \left|\frac{A_d}{A_c}\right|$$

OP-AMP: Amplificatore differenziale

- Per realizzare un amplificatore differenziale con un OP-AMP utilizziamo il circuito seguente”



OP-AMP ideale

1) **I due ingressi hanno la stessa tensione v;**
2) **nell’operazionale non entra corrente.**

N.B. si suppone resistenze identiche

$$v_o = v - iR_2 \qquad i = \frac{v_1 - v}{R_1}$$

$$v_o = v - \frac{R_2}{R_1}(v_1 - v) \qquad v_o = v\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1}v_1$$

- Dall’ingresso non invertente ricaviamo v in funzione di v_2: $v = v_2 \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$

- Combinando insieme le due equazioni otteniamo il risultato finale:

$$\boxed{v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)}$$

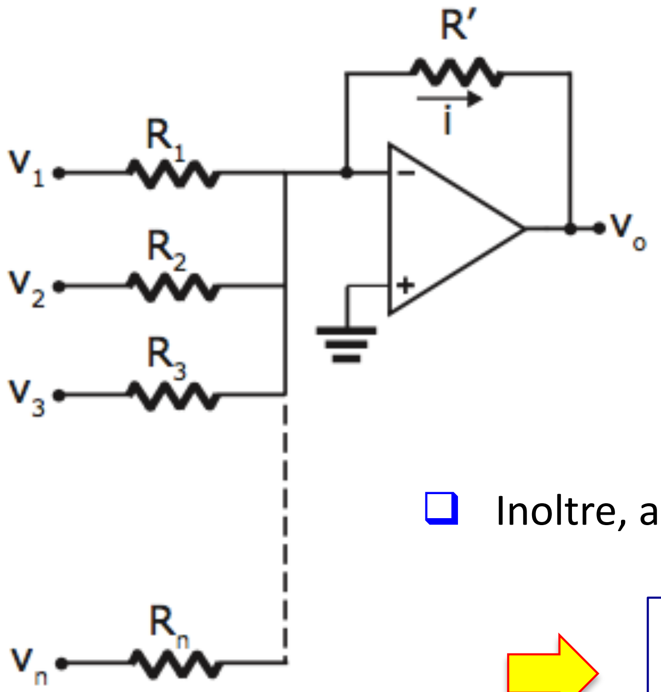
OP-AMP ideale:
CMRR infinito

- Un OP-AMP reale avrà un CMR finito, sia perché $A_1 \neq -A_2$ e sia perché le resistenze usate non saranno perfettamente uguali:

Sommatore analogico invertente

OP-AMP: Sommatore analogico invertente

- Analizziamo ora il circuito seguente che fa la somma analogica dei segnali in ingresso:



OP-AMP ideale

1) **I due ingressi hanno la stessa tensione v=0;**
2) **nell'operazionale non entra corrente.**

$$i = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \cdots + \frac{v_n}{R_n}$$

- Inoltre, applicando la legge di Ohm alla resistenza R': $v_o = -R'i$

$$v_o = -R'\left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \cdots + \frac{v_n}{R_n}\right)$$

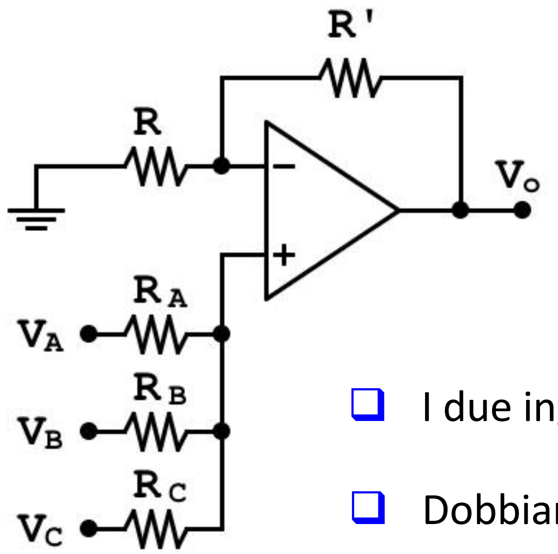
- Ponendo: $R_1 = R_2 = \cdots = R_n$

- Abbiamo il risultato finale: $$v_o = -\frac{R'}{R}(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$$

Sommatore analogico non invertente

OP-AMP: Sommatore analogico non inv.

- Analizziamo ora il sommatore analogico non invertente:



OP-AMP ideale

1) **I due ingressi hanno la stessa tensione v;**
2) **nell'operazionale non entra corrente.**

N.B. la reazione si fa sempre sull'ingresso invertente

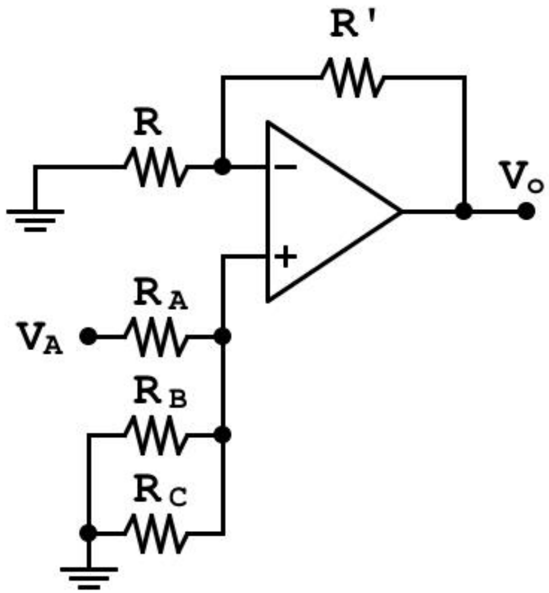
- I due ingressi hanno lo stesso potenziale: $$v_- = v_o \cdot \frac{R}{R'+R} = v_+$$

- Dobbiamo esprimere V_+ in termini di V_A, V_B e V_C.

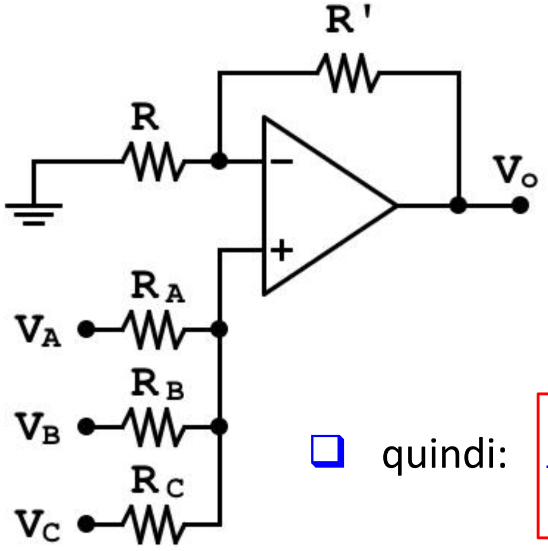
- Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti applicando un generatore di segnali alla volta, cortocircuitando gli altri due e poi sommando i risultati:

$$v_+^A = \frac{R_B \| R_C}{R_A + R_B \| R_C} \cdot v_A$$

Lo stesso vale per gli altri due generatori



OP-AMP: Sommatore analogico non inv.



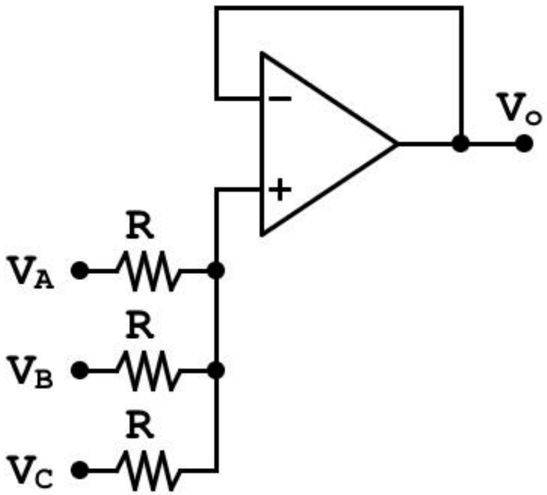
$$v_+ = \frac{R_B \| R_C}{R_A + R_B \| R_C} \cdot v_A + \frac{R_A \| R_C}{R_B + R_A \| R_C} \cdot v_B + \frac{R_A \| R_B}{R_C + R_A \| R_B} \cdot v_C$$

- definiamo: $$R_A \| R_B \| R_C = \frac{R_A \cdot R_B \cdot R_C}{R_A \cdot R_B + R_A \cdot R_C + R_B \cdot R_C} = R_K$$

- quindi: $$\frac{R_B \| R_C}{R_A + R_B \| R_C} = \frac{R_A \cdot R_C}{R_A \cdot R_B + R_A \cdot R_C + R_B \cdot R_C} = \frac{R_K}{R_A}$$

$$\Rightarrow \quad v_+ = R_K \cdot \left[\frac{V_A}{R_A} + \frac{V_B}{R_B} + \frac{V_C}{R_C} \right]$$

$$\Rightarrow \quad v_o = \frac{R' + R}{R} v_+ = \frac{R' + R}{R} \cdot R_K \cdot \left[\frac{V_A}{R_A} + \frac{V_B}{R_B} + \frac{V_C}{R_C} \right]$$



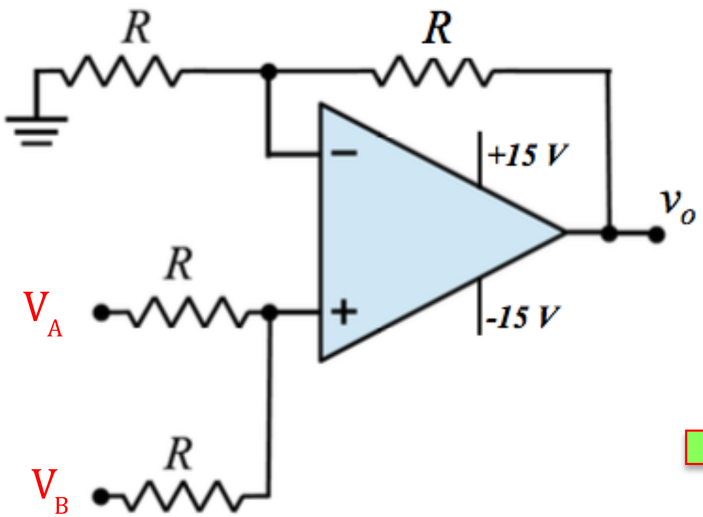
- Caso speciale: un emitter follower con tre resistenze uguali:

$$\Rightarrow \quad R_K = \frac{R}{3} \quad \Rightarrow \quad v_o = \frac{R}{3} \cdot \left[\frac{V_A}{R} + \frac{V_B}{R} + \frac{V_C}{R} \right] = \frac{1}{3} \cdot \left(V_A + V_B + V_C \right)$$

Il segnale d'uscita è la media dei segnali d'ingresso

OP-AMP: Sommatore analogico non inv.

- Analizziamo il sommatore che userete in laboratorio:



$$v_o = \frac{R'+R}{R}\cdot R_K \cdot \left[\frac{V_A}{R_A}+\frac{V_B}{R_B}\right]$$

$$\Rightarrow \quad R_K = \frac{R}{2} \qquad R' = R$$

$$\Rightarrow \quad v_o = \frac{R+R}{R}\cdot\frac{R}{2}\cdot\left[\frac{V_A}{R}+\frac{V_B}{R}\right] = V_A + V_B$$

Questo circuito fa la somma analogica dei due segnali presenti agli ingressi

- Caso generale di un sommatore con n ingressi: $$v_o = \frac{R'+R}{R}\cdot R_K \cdot \left[\frac{V_A}{R_A}+\frac{V_B}{R_B}+\cdots+\frac{V_n}{R_n}\right]$$

- scegliamo: $R_A = R_B = \cdots = R_n = R_Z$ $\Rightarrow$ $R_K = \frac{R_Z}{n}$ e $R' = (n-1)\cdot R$

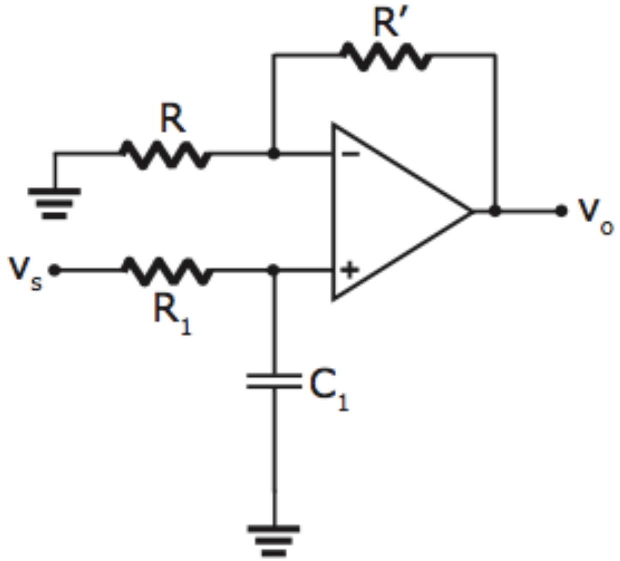
$$\Rightarrow \quad v_o = \frac{(n-1)\cdot R + R}{R}\cdot\frac{R_Z}{n}\cdot\left[\frac{V_A}{R_Z}+\frac{V_B}{R_Z}+\cdots+\frac{V_n}{R_Z}\right] = V_A + V_B + \cdots + V_n$$

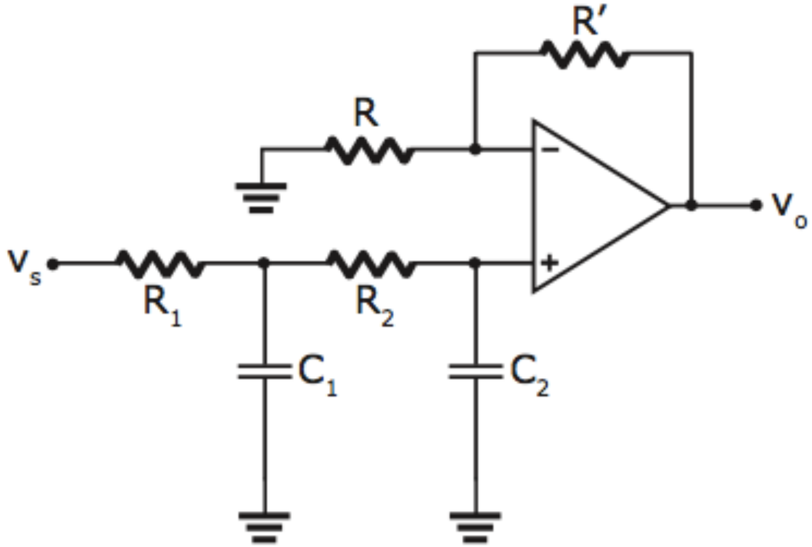
N.B. La somma deve essere minore dell'alimentazione, in questo caso di + 15 V

Filtri attivi

OP-AMP: Filtri attivi

- Con gli amplificatori operazionali si possono realizzare anche dei filtri attivi, cioè dei circuiti selettivi in frequenza, che sono molto più efficienti di quelli realizzati con solo componenti passivi.
- Si chiamano filtri del primo ordine quando la funzione di trasferimento ha un solo polo, oppure filtri del secondo ordine quando la funzione di trasferimento ha due poli.
- Con il filtri del secondo ordine si possono realizzare anche dei filtri passa-banda senza la necessità di usare degli induttori.
- In figura abbiamo un esempio di filtro passa-basso del primo ordine (a sinistra) oppure del secondo ordine (a destra).

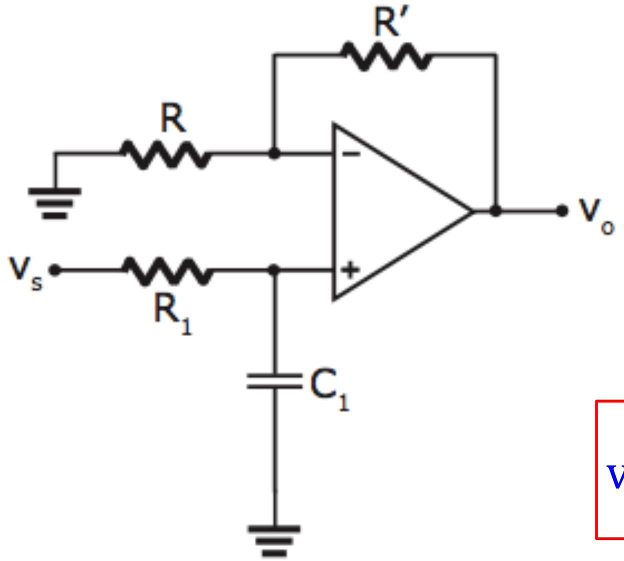




- Il ruolo dell'op-amp è di amplificare il segnale e di fornire una bassa resistenza d'uscita per permettere l'accoppiamento di più stadi in cascata;
- Scambiando R con C si possono avere filtri passa-alto, passa banda o elimina-banda

OP-AMP: filtro passa basso del I ordine

- Esaminiamo il filtro passa basso ad un polo:



OP-AMP ideale

1) **I due ingressi hanno la stessa tensione v;**
2) **nell'operazionale non entra corrente.**

$$\boxed{v_- = v_+}$$

$$v_- = v_o \frac{R}{R'+R} \Rightarrow v_o = \frac{R'+R}{R} \cdot v_-$$

Partitore di tensione

- Ricaviamo ora la tensione all'ingresso non invertente tramite il partitore R_1-C_1:

$$v_+ = \frac{1/j\omega C_1}{R_1 + 1/j\omega C_1} \cdot v_s = \frac{1}{j\omega R_1 C_1 + 1} \cdot v_s \xrightarrow{v_- = v_+} \boxed{v_o = \frac{R'+R}{R} \cdot \frac{1}{j\omega R_1 C_1 + 1} \cdot v_s}$$

- Questa è la risposta tipica di un filtro passa basso con frequenza di taglio pari a:

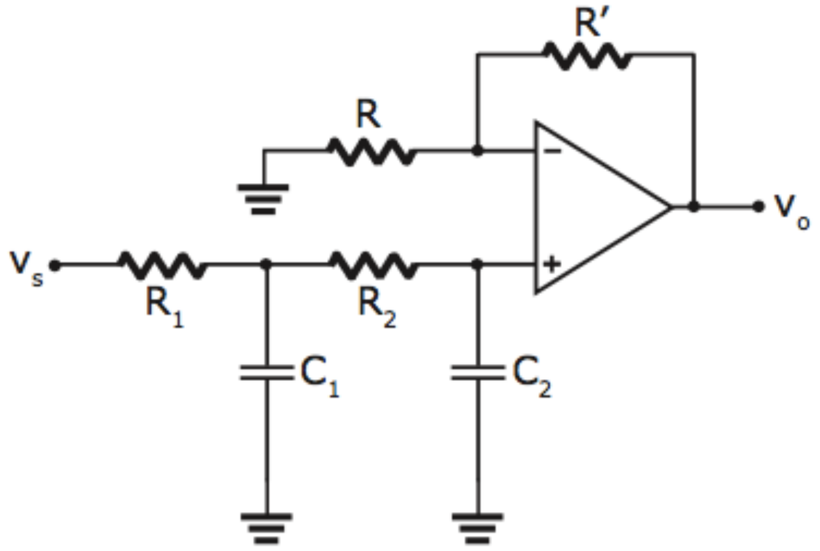
$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{R_1 C_1}}$$

$$\boxed{v_o = \frac{R'+R}{R} \cdot v_s}$$

Segnale d'uscita a basse frequenze

OP-AMP: filtro passa basso del II ordine

- Si può migliorare il filtro al primo ordine aggiungendo un polo alla funzione di trasferimento:



- In questo caso se poniamo:

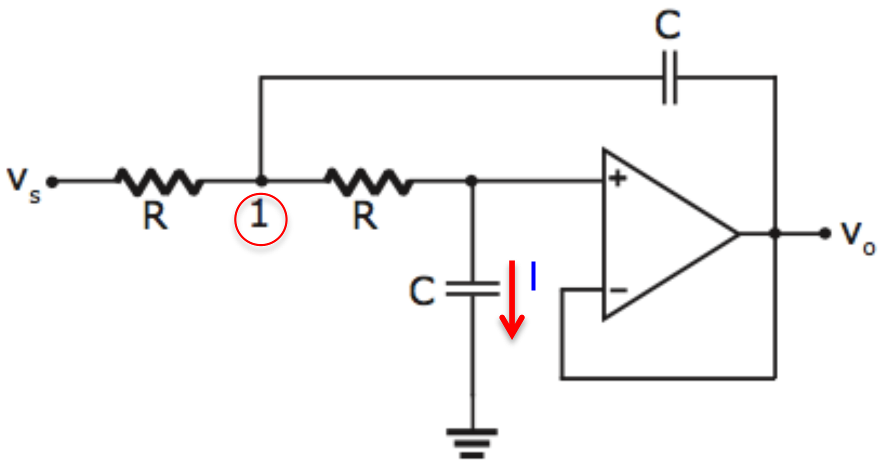
$$\boxed{\begin{aligned} R_1C_1 &= R_2C_2 \\ R_2 &\gg R_1 \end{aligned}}$$

i due filtri in cascata avranno la stessa frequenza di taglio e la funzione di trasferimento è uguale al prodotto delle due funzioni di trasferimento

- Si può verificare che questo filtro ha una discesa asintotica di 40 db/decade.

OP-AMP: filtro Sallen-Key passa basso

- Si può realizzare un filtro passa basso del II ordine secondo il circuito in figura, chiamato cella Sallen-Key dal nome dei suoi inventori:



- In questo caso le due resistenze e le due capacità hanno gli stessi valori e l'amplificazione è unitaria (emitter follower):
- Calcoliamo la funzione di trasferimento utilizzando la solita approssimazione. Notiamo che entrambi gli ingressi si trovano alla tensione V_0:

- La corrente I che passa ne condensatore verso terra vale: $I = sCV_o$
- Tensione del punto 1: $V_1 = I(R + \frac{1}{sC})$

$$\Rightarrow \quad V_1 = sCV_o(R + \frac{1}{sC})$$

- Legge dei nodi per il punto 1:

$$\frac{V_i - V_1}{R} = sC(V_1 - V_o) + \frac{V_1}{R + \frac{1}{sC}}$$

- Inserendo V_1 nella legge dei nodi si arriva a: $A(s) = \frac{1}{(sRC)^2 + 2s(RC) + 1}$

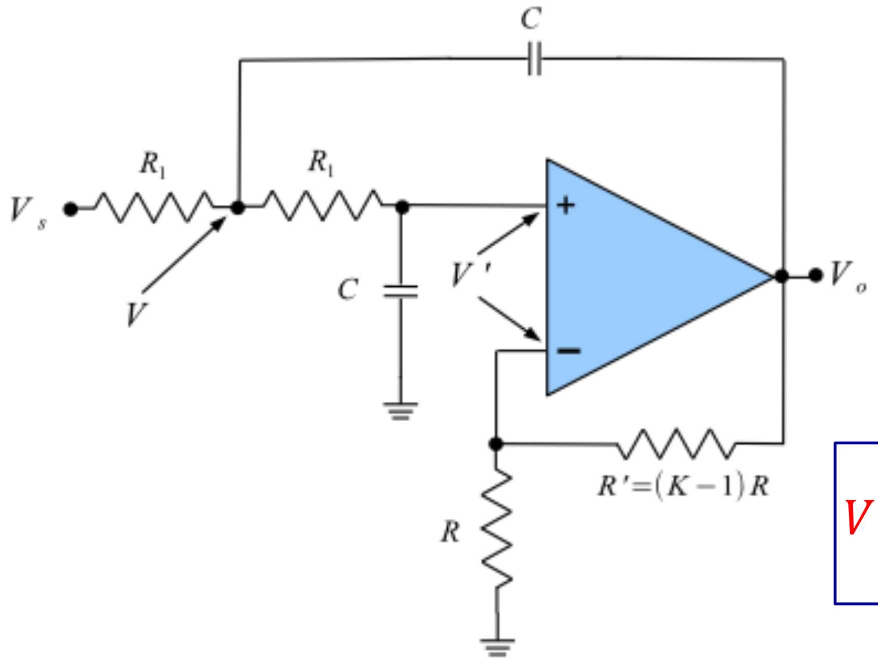
$$\Rightarrow \quad \boxed{A(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega RC)(1 + j\omega RC)}}$$

Prodotto della funziona di trasferimento di due filtri passa basso con costante di tempo RC

N.B. scambiando R con C si ha un filtro passa alto

OP-AMP: filtro VCVS passa basso

- I filtri VCVS (Voltage Controlled Voltage Source) sono una variante dei circuiti tipo Sallen-Key in cui l'inseguitore di tensione è sostituito da un amplificatore non invertente con amplificazione **A_v=K**:



Indichiamo con V' la tensione (uguale) dei due ingressi e con V la tensione del nodo tra i due resistori R_1:

$$V' = V_o \cdot \frac{R}{R'+R} \Rightarrow V' = \frac{V_o}{K}$$

$$V' = V \cdot \frac{1/sC}{R_1 + 1/sC} \Rightarrow V = V'(1 + sCR_1)$$

- Legge dei nodi:

$$\frac{V_s - V}{R_1} = \frac{V - V'}{R_1} + (V - V_o)sC$$

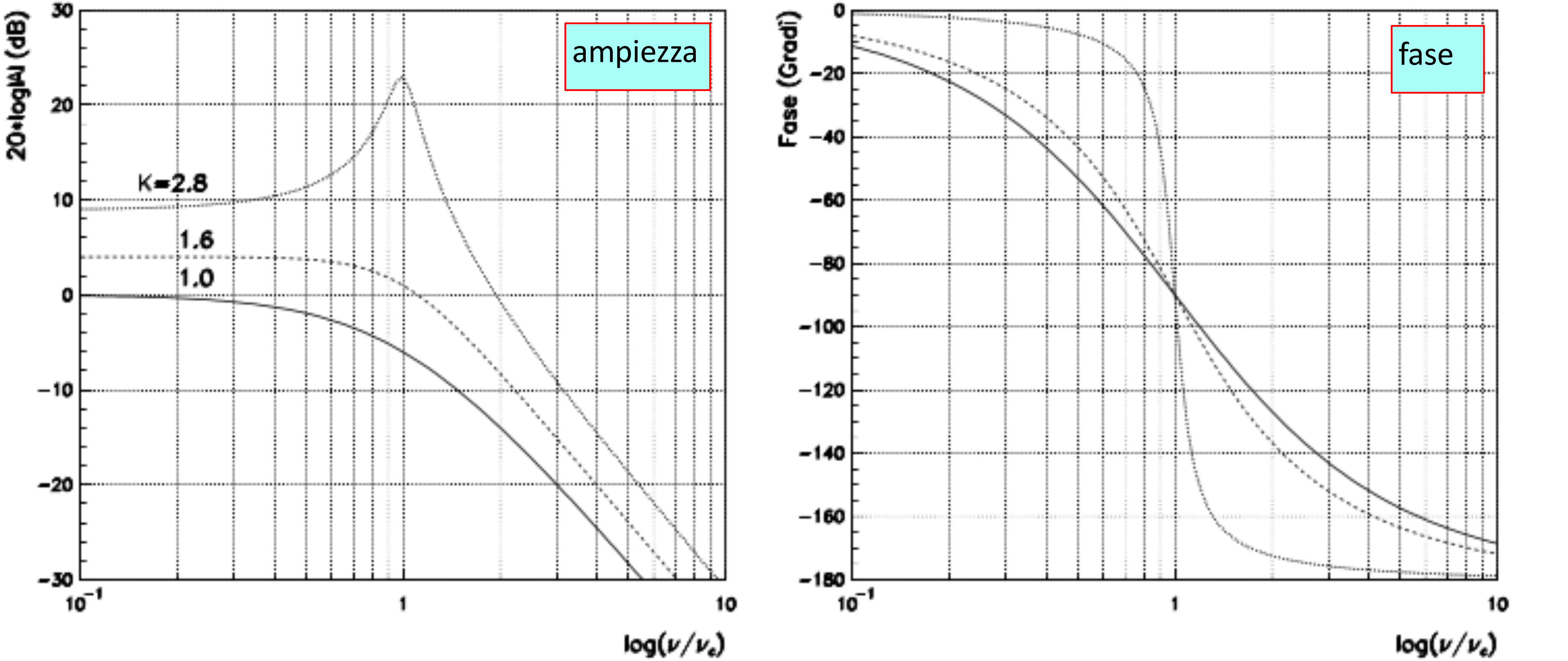
- Eliminando V e V' dalle equazioni si ottiene la funzione di trasferimento:

$$T = \frac{K}{(sCR_1)^2 + (3-K)(sCR_1) + 1} \Longrightarrow \omega_c = \frac{1}{R_1 C}$$

La forma delle risposta del filtro dipende dal valore dell'amplificazione K

OP-AMP: risposta del filtro VCVS

- La forma della risposta di un filtro VCVS dipende, nella regione di transizione, dal fattore di amplificazione K, come si vede in figura, dove sono riportati gli andamenti dell'ampiezza e della fase :



- Per valore di K superiori a 1.586 il modulo dell'ampiezza mostra un ***overshooting*** attorno alla frequenza critica, mentra la fase mostra, al crescere di K, una transizione sempre più netta;
- Il valore K=1.586 individua il filtro **Butterworth**, ovvero quello caratterizzato dalla massima ***piattezza*** nella regione al di sotto della frequenza di taglio.

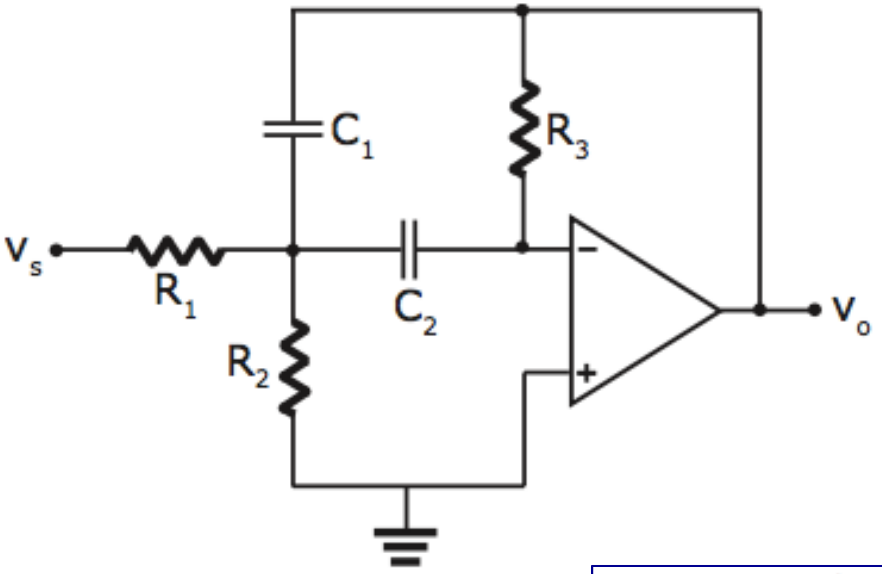
N.B. lo sfasamento alla frequenza di taglio è di -90°

OP-AMP: risposta del filtro VCVS

- Ricavare quanto vale l’ampiezza alla frequenza di taglio : A = K/(3-K)

OP-AMP: filtro passa banda

- Un filtro attivo passa banda può esser realizzato con il circuito seguente :



Funzione di trasferimento

$$A(\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{-\dfrac{R_3}{2R_1}}{\left[1 + j\left(\dfrac{R_3 C}{2}\omega - \dfrac{1}{2CR'\omega}\right)\right]}$$

dove $R' = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

- Frequenza di risonanza: $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{R' R_3 C}}$

- ampiezza massima (sulla risonanza): $A_o = -\dfrac{R_3}{2R_1}$

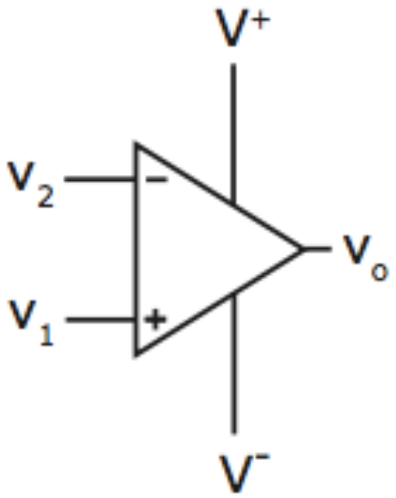
- Fattore di merito: $Q = \omega_o \dfrac{R_3 C}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{R_3}{R'}}$

$$|A| = \frac{|A_o|}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_o} - \dfrac{\omega_o}{\omega}\right)^2}}$$

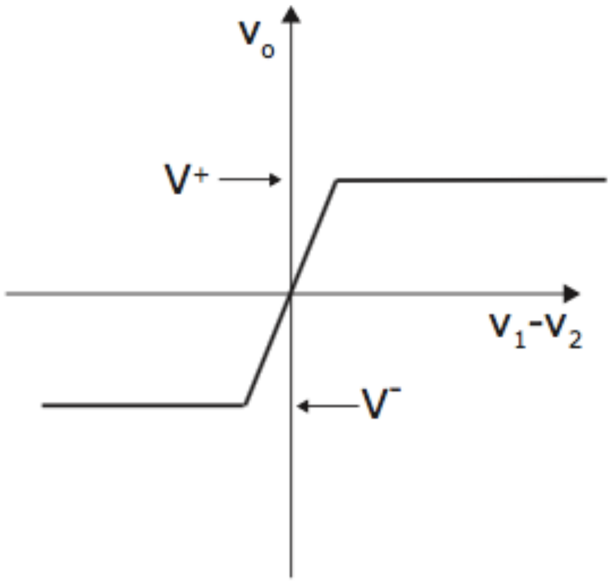
Comparatore

OP-AMP: Comparatore

- Un filtro attivo può essere usato per confrontare due segnali, utilizzando un op-amp senza rete di reazione come illustrato in figura:
- Dato che l'amplificazione ad anello aperto è molto alta, il dispositivo è sensibile a differenze di qualche decimo di mV tra i due segnali (la regione di transizione è molto piccola).
- L'uscita va in saturazione ad una delle due alimentazioni, in base al segno della differenza tra i due segnali d'ingresso.



$$\boxed{\begin{array}{ll} v_o = V^+ & \text{se } v_1 > v_2 \\ v_o = V^- & \text{se } v_1 < v_2 \end{array}}$$

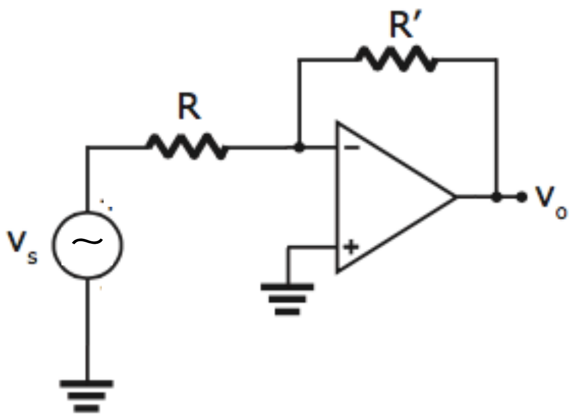


- Questo dispositivo trova grande uso nell'elettronica digitale per confrontare due livelli logici:

Operazioni sul segnale d'ingresso

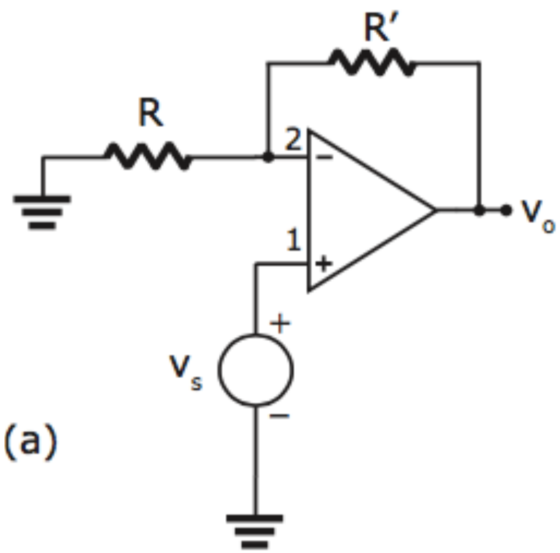
OP-AMP: moltiplicare Vs

- Moltiplicare il segnale d'ingresso e cambiare di segno :



$$V_o = -\frac{R'}{R} \cdot V_s$$

- Moltiplicare il segnale d'ingresso senza cambiare di segno :



(a)

$$V_o = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \cdot V_s$$

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Fine del capitolo 5