

Cenni di fisica teorica

- **Equazioni d'onda relativistiche: equazione di Klein-Gordon ed equazione di Dirac.**
- **Matrici γ .**
- **Covarianti bilineari.**
- **Elicità.**
- **Introduzione alla seconda quantizzazione.**
- **Formalismo Lagrangiano.**
- **Matrice S .**
- **Diagrammi di Feynman.**
- **Propagatore.**
- **Cenni al problema della rinormalizzazione.**
- **Regola d'oro di Fermi.**
- **Probabilità di transizione per unità di tempo.**



EQUAZIONI RELATIVISTICHE

- PARTICELLA LIBERA ISOLATA

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

$$H \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

\Rightarrow eq. di Schrödinger non relativistica

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t)$$

QUESTA EQUAZIONE NON È COVARIANTE E NON VA BENE

- QUADRI VETTORE È ENERGIA-IMPULSO (COVARIANTE)

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2$$

- OPERATORE p^μ È COVARIANTE

$$p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

- POTREMMO SCEGLIERE

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi$$

MA NON È CHIARO COME INTERPRETARE L'OPERATORE $\sqrt{\quad}$

$$\Rightarrow H^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m^2 c^4) \psi$$

- QUESTA È L'EQUAZIONE DELLE ONDE

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 \quad \square \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

- QUESTA EQUAZIONE CONDUCE A DELLE SOLUZIONI CON ENERGIE NEGATIVE
- COSTRUIAMO UNA CORRENTE CONSERVATA

$$\psi^* \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi - \psi \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0$$

$$\nabla^\mu (\psi^* \nabla_\mu \psi - \psi \nabla_\mu \psi^*) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] + \operatorname{div} \frac{\hbar}{2im} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] = 0$$

- EQUAZIONE DI CONTINUITA'

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \equiv \text{densità di probabilità}$$

... PROBLEMA ... NON È DEFINITA POSITIVA

- QUESTA EQUAZIONE SI CHAMA EQ. DI KLEIN-GORDON ED È ORA UTILIZZATA PER DESCRIVERE IL COMPORTAMENTO DI PARTICELLE CON SPIN 0
- PER OTTENERE UNA DENSITÀ DI PROBABILITÀ POSITIVA OCCORRE TROVARE UN'EQUAZIONE CHE SIA LINEARE NELLE DERIVATE

EQUAZIONE DI DIRAC

- NEL 1928 DIRAC PROPOSÌ L'EQ. SEGUENTE

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} \right) + \beta m c^2 \psi \equiv H \psi$$

- I COEFFICIENTI α_i NON POSSONO ESSERE DEI NUMERI
ALTRIMENTI L'EQ. NON SAREBBE INVARIANTE NEMMENO
PER ROTAZIONI SPAZIALI

$\Rightarrow \psi$ NON PUÒ ESSERE UN SEMPLICE SCALARE

- DIRAC PROPOSÌ CHE LA SUA FOSSE UN'EQ. MATRICIALE

LA ψ PUÒ ESSERE SCRITTA COME UN VETTORE COLONNA
A N COMPONENTI

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}$$

I COEFFICIENTI α_i E β SONO MATRICI $N \times N$

- L'EQUAZIONE DEVE DARE LA GIUSTA RELAZIONE RELAT.
TRA ENERGIA E QUANTITÀ DI MOTO

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

VALIDA PER UNA PARTICELLA LIBERA

- EQUAZIONE DI CONTINUITA' VALIDA
- DEVE ESSERE COVARIANTE
- PER SODDISFARE LA RELAZIONE ENERGIA-MOMENTO, CIASCUNA COMPONENTE ψ_α DI Ψ DEVE SODDISFARE L'EQ. DI SECONDO GRADO DI KLEIN-GORDON

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi_\alpha$$

ITERANDO L'EQ. PRECEDENTE SI HA:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j}^3 \frac{\alpha_j \alpha_i + \alpha_i \alpha_j}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_i^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 c^4 \psi$$

- PER SODDISFARE L'EQ. DI KLEIN-GORDON SI DEVE AVERE:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2 \delta_{ij} \quad (\text{anticommutazione}) \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ \alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \end{array} \right.$$

- INOLTRE LE α_i E β DEVONO ESSERE MATRICI HERMITIANE IN MODO CHE LO SIA ANCHE H

- DATO CHE $\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$

\Rightarrow GLI AUTOVALORI DEVONO ESSERE ± 1

(N.B. una matrice hermitiana può sempre essere diagonalizzata)

- DALLE PROPRIETÀ DI ANTICOMMUTAZIONE SEGUE CHE LA TRACCIA DELLE MATRICI DEVE ESSERE ZERO

$\Rightarrow N$ DEVE ESSERE PARI

\Rightarrow LA DIMENSIONE PIÙ BASSA È UGUALE A 4

- IN UNA RAPPRESENTAZIONE ESPlicita SI HA:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ

- $\Psi^+ = (\psi_1^* \dots \psi_n^*)$ funzione d'onda hermitiana coniugata

$$\Rightarrow i\hbar \Psi^+ \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\hbar c \sum_k \Psi^+ \alpha_k \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} + m c^2 \Psi^+ \beta \Psi$$

- SCRIVIAMO L'EQ. DI DIRAC CONIUGATA E POI MOLTIPLICHIAMO A DESTRA PER Ψ

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} \Psi = +i\hbar c \sum_k \frac{\partial \Psi^+}{\partial x^k} \alpha_k \Psi + m c^2 \Psi^+ \beta \Psi$$

- SOTTRAIAMO LE DUE EQUAZIONI MEMBRO A MEMBRO, SI HA:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^+ \Psi) = \sum_k \frac{\hbar c}{i} \frac{\partial}{\partial x^k} (\Psi^+ \alpha^k \Psi)$$

EQUIVALENTE A:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

CON L'IDENTIFICAZIONE

$$\rho = \Psi^+ \Psi = \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^* \psi_{\sigma} \quad (\text{densità di probabilità})$$

$$j^k = c \Psi^+ \alpha^k \Psi \quad (\text{corrente di probabilità})$$

- SI PUÒ DIMOSTRARE CHE ρ E \vec{j} FORMANO LE COMPONENTI DI UN QUADRIVETTORE E L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ È COVARIANTE

SOLUZIONI DELL'EQ. DI DIRAC PER UN ELETTRONE A RIPOSO

- SE L'ELETTRONE È A RIPOSO ($\vec{p} = 0$) LA FUNZIONE D'ONDA NON DIPENDE DALLA POSIZIONE

⇒ L'EQ. DI DIRAC DIVENTA:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta mc^2 \psi \quad \left[\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

- LE 4 SOLUZIONI SONO:

$$\psi^1 = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \psi^2 = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{energia positiva})$$

$$\psi^3 = e^{+\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \psi^4 = e^{+\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{energia negativa})$$

- DIRAC POSTULÒ UN MARE COMPLETAMENTE RIEMPIUTO DA ELETTRONI CON ENERGIA NEGATIVA. A VOLTE C'È UNA "LACUNA" CHE APPARE COME UNA CARICA POSITIVA

- FEYNMAN E STÜCKELBERG INTERPRETARONO LE SOLUZIONI ψ^3 e ψ^4 COME QUELLE DI UN ELETTRONE CHE SI MUOVE ALL'INDIETRO NEL TEMPO, CHE CORRISPONDE AD UN POSITRONE CHE SI MUOVE IN AVANTI NEL TEMPO

$$e^{-i(-E)(-t)} = e^{-iEt}$$

COVARIANZA DELL'EQ. DI DIRAC

- RISCRIVIAMO L'EQUAZIONE IN UNA FORMA CHE CONSERVI LA SIMMETRIA TRA ct E x^i .
- INTRODUCIAMO LE MATRICI γ

$$\gamma^0 = \beta \quad ; \quad \gamma^i = \beta \alpha_i \quad i=1, 2, 3$$

- L'EQ. DIVENTA, DOPO AVER MOLTIPLICATO PER β/c

$$i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \Psi - mc\Psi = 0$$

- REGOLE DI ANTICOMMUTAZIONE PER LE MATRICI γ^μ

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\gamma^{\mu\nu} \mathbb{1}$$

- LE γ^i SONO ANTIHERMITIANE, CON $(\gamma^i)^2 = -1$

- γ^0 È HERMITIANO

- UNA POSSIBILE RAPPRESENTAZIONE È LA SEGUENTE:

$$\gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- N.B. SPINORE AGGIUNTO

$$\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger \gamma^0$$

- NOTAZIONE DI FEYNMAN

$$A = \gamma^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu A^\nu = \gamma^0 A^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{A}$$

- IN PARTICOLARE

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\gamma^0}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}$$

- L'EQ. DI DIRAC DIVENTA :

$$(i\hbar \not{\partial} - mc) \psi = 0$$

OPPURE, CONSIDERANDO CHE $p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$,

$$\Rightarrow (\not{p} - mc) \psi = 0$$

DA QUI SI VEDE IMMEDIATAMENTE CHE L'EQUAZIONE DI DIRAC E' COVARIANTE A VISTA

- SI PUO' DIMOSTRARE CHE LE SOLUZIONI AD ENERGIA NEGATIVA E QUELLE AD ENERGIA POSITIVA, HANNO VALORI OPPOSTI DELL'AUTOVALORE DELLA RIFLESSIONE SPAZIALE, OUVERO HANNO PARITA' INTRINSECA OPPOSTA.

N.B. \Rightarrow FERMIONI E ANTI FERMIONI HANNO PARITA' INTRINSECA OPPOSTA

COVARIANTI BILINEARI

- FACENDO DEI PRODOTTI DELLE MATRICI γ SI POSSONO COSTRUIRE 16 MATRICI LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Gamma_{\alpha\beta}^n$ CHE APPAIONO SPESSO NELLE APPLICAZIONI DELLA TEORIA DI DIRAC.

$$\Gamma^S = 1 \quad ; \quad \Gamma_\mu^V = \gamma_\mu \quad ; \quad \Gamma_{\mu\nu}^{LT} = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$$

$$\Gamma^P = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^5 = \gamma_5 \quad ; \quad \Gamma_\mu^A = \gamma_5 \gamma_\mu$$

- SI TROVA CHE $\gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0$

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma_0$$

- SI POSSONO TROVARE LE PROPRIETA' DI TRASFORMAZIONE DELLE 16 FORME BILINEARI $\bar{\psi}(x) \Gamma^n \psi(x)$

$$\bar{\psi}(x) \psi(x) : \text{SCALARE}$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) : \text{PSEUDO SCALARE}$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \text{VETTORE}$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma^\mu \psi(x) : \text{PSEUDO VETTORE}$$

$$\bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) : \text{TENSORE DI RANGO 2 ANTISIMMETRICO}$$

SOLUZIONE CON ONDE PIANE

(GRIFFITHS)

- CERCHIAMO UNA SOLUZIONE DELLA FORMA:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Omega e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon t - \vec{p} \cdot \vec{r})} u(\epsilon, \vec{p})$$

$$\equiv \Psi(x^\mu) = \Omega e^{-\frac{i}{\hbar} x^\mu p_\mu} u(p_\mu)$$

↑
fattore di normalizzazione

← spinore

- N.B. LA DIPENDENZA DA x^μ È SOLO NELL'ESPOLENTE, QUINDI:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = -\frac{i}{\hbar} p_\mu \Omega e^{-\frac{i}{\hbar} x^\mu p_\mu} u(p_\mu)$$

- INTRODUCENDO QUESTA SOLUZIONE NELL'EQ. DI DIRAC, SI OTTIENE

$$\gamma^\mu p_\mu \Omega e^{-\frac{i}{\hbar} x^\mu p_\mu} u - mc \Omega e^{-\frac{i}{\hbar} x^\mu p_\mu} u = 0$$

$$\Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - mc) u(p_\mu) = 0 \quad \left[\text{Eq. di Dirac nelle spaz. di mom.} \right]$$

NON CI SONO DERIVATE IN QUESTA EQUAZIONE

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \vec{p} \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y \\ -\sigma_y & \sigma_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -\frac{E}{c} \end{pmatrix}$$

QUINDI :

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc) u = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} - mc & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -\frac{E}{c} - mc \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} =$$

SOLUZIONE
DEI COMPONENTI.

$$= \begin{bmatrix} (\frac{E}{c} - mc) u_A - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} u_B \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} u_A - (\frac{E}{c} + mc) u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- PER SODDISFARE L'EQUAZIONE DI DIRAC DOBBIAMO AVERE :

$$u_A = \frac{c}{E - mc^2} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_B \quad ; \quad u_B = \frac{c}{E + mc^2} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_A$$

- DA QUI SI POSSONO COSTRUIRE LE 4 SOLUZIONI INDIPENDENTI DELL'EQ. DI DIRAC.

- LAVORANDO IL FATTORE DI NORMALIZZAZIONE ϵ

$$1) \text{ scegliamo } u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \frac{c}{E + mc^2} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + i p_y \end{pmatrix}$$

$$2) \quad " \quad u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_x - i p_y \\ -p_z \end{pmatrix}$$

$$3) \quad " \quad u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \frac{c}{E - mc^2} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + i p_y \end{pmatrix}$$

$$4) \quad " \quad u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_x - i p_y \\ -p_z \end{pmatrix}$$

PER LE SOLUZIONI 1) E 2) DOBBIAMO SCEGLIERE " ϵ " POSITIVA (PARTICELLE),
NEUTRE PER 3) E 4) " ϵ " NEGATIVA (ANTI PARTICELLE)

GLI SPINORI SI POSSONO NORMALIZZARE IN VARI MODI,
AD ESEMPIO:

$$u^\dagger u = \frac{2|E|}{c} \quad (\text{Halzen and Martin})$$

$$u^\dagger u = \frac{E}{mc^2} \quad (\text{Bjorken and Drell}) ; \text{ problemi per } m \rightarrow 0$$

$$u^\dagger u = 1 \quad (\text{Bogoliubov and Shirkov})$$

QUINDI:

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c \cdot p_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E + mc^2} \end{pmatrix} \quad \text{etc...}$$

$$N = \sqrt{(|E| + mc^2) / c}$$

- SI POTREBBE PENSARE CHE $u^{(1)}$ E $u^{(2)}$ DESCRIVANO UN'ELETTRONE CON SPIN UP (DOWN) MA NON E' COSI'
- LE 4 SOLUZIONI COSTITUISCONO UN SET COMPLETO DI SOLUZIONI MA NON SONO AUTOSTATI DELL'ELICITA' ($\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}$)
- \vec{S} NON E' UNA GRANDEZZA CONSERVATA, SOLO IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ LO E'

- PER LE PARTICELLE DI DIRAC LA MATRICE DI SPIN È:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma} \quad \text{DOVE} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

SI PUÒ VERIFICARE CHE $U^{(1)}$ NON È AUTOSTATO DI Σ_z

- TUTTAVIA, SE ORIENTIAMO L'ASSE Z NELLA DIREZIONE DEL MOTO SI HA $p_x = p_y = 0$

⇒ $U^{(1)}$ E $U^{(3)}$ SONO AUTOSTATI CON SPIN UP
 $U^{(2)}$ E $U^{(4)}$ SONO AUTOSTATI CON SPIN DOWN

N.B. E e \vec{p} NELL'EQUAZIONE $\psi(\vec{r}, t) = Q e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} u(E, \vec{p})$ SONO PARAMETRI MATEMATICI CHE CORRISPONDONO FISICAMENTE A ENERGIA E QUANTITÀ DI MOTO. QUESTO È VERO PER GLI STATI $U^{(1)}$ E $U^{(2)}$.

- QUESTO NON È POSSIBILE PER GLI STATI $U^{(3)}$ e $U^{(4)}$ PERCHÉ I POSIZIONI IN DANI CASO HANNO ENERGIA POSITIVA, QUINDI PER QUESTE SOLUZIONI SI CAMBIA IL SEGNO DI E e \vec{p}

$$\psi(\vec{r}, t) = Q e^{\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} u(-E, -\vec{p}) \quad (\text{per } U^{(3)} \text{ e } U^{(4)})$$

- LE SOLUZIONI $U^{(3)}$ e $U^{(4)}$ CHE DESCRIVONO I POSIZIONI, ESPRESSE IN TERMINI DEI PARAMETRI FISICI (ENERGIA POSITIVA) SI INDICANO IN LETTERATURA CON v

$$v^{(1)} \equiv U^{(4)} \quad (\text{spin down})$$

$$v^{(2)} \equiv -U^{(3)} \quad (\text{spin up})$$

N.B. L'OPERAZIONE CORRISPONDENTE È CHIAMATA OPERAZIONE DI CARICA (12)

$$U^{(1)} = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E + mc^2} \end{bmatrix} ; \quad U^{(2)} = N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E + mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E + mc^2} \end{bmatrix}$$

$$U^{(4)}(\vec{E}, \vec{p}) = U^{(4)}(-\vec{E}, -\vec{p}) = N \begin{bmatrix} \frac{c(p_x - i p_y)}{E + mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U^{(2)}(\vec{E}, \vec{p}) = -U^{(3)}(-\vec{E}, -\vec{p}) = -N \begin{bmatrix} \frac{c p_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $E = \sqrt{p_x^2 c^2 + p_y^2 c^2 + p_z^2 c^2 + m^2 c^4}$
- LE U SODDISFANO L'EQUAZIONE $(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0$
- MENTRE PER LE v BISOGNA INSERIRE IL SEGNO DI p_μ
 $(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0$

CAMPO E.M. IN ASSENZA DI CARICHE

RAUOL - SHAW

- EQ. DI MAXWELL unite funzione vortonizzata (cgs)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- POTENZIALI $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$; $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

- TRASFORMAZIONE DI GAUGE, FUNZIONE ARBITRARIA $f(\vec{x}, t)$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} ; \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f$$

- EQ. DI MAXWELL TRAMITE I POTENZIALI

$$\square \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \frac{1}{c} \vec{j}$$

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

$$\square \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \rho$$

- SE $\rho = 0$ E $\vec{j} = 0$, SI PUO' SCEGLIERE LA GAUGE DI COULOMB (GAUGE DI RADIAZIONE) DOVE $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \quad \text{quindi si puo' scegliere } \phi = 0$$

- LA SOLUZIONE PER \vec{A} E' LA SEGUENTE

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad \text{con } \vec{k} \cdot \vec{A} = 0$$

- \vec{A} E' PERPENDICOLARE ALLA PROPAGAZIONE DELL'ONDA

- L'HAMILTONIANA DEL SISTEMA È:

$$H_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3 \vec{x}$$

- AD UN DATO TEMPO t , IL CAMPO VA SPECIFICATO IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIO \vec{x} , QUINDI IL CAMPO POSSIÈDE UN NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ INFINITO.
- PER SEMPLIFICARE CONSIDERIAMO IL CAMPO ALL'INTERNO DI UN CUBO DI LATO L E VOLUME V ED IMPOSTIAMO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO PERIODICHE SULLA SUPERFICIE

$$\vec{A}(0, y, z, t) = \vec{A}(L, y, z, t), \text{ etc.}$$

- LE FUNZIONI $\frac{1}{\sqrt{V}} \vec{E}_r(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ $r=1,2$

FORMANO UN SET COMPLETO DI VETTORI DI CAMPO ORTONORMALI

- IL VETTORE D'ONDA \vec{k} HA LA FORMA:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3) \quad n_1, n_2, n_3 = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

$$\vec{E}_r(\vec{k}) \cdot \vec{E}_s(\vec{k}) = \delta_{rs} \quad ; \quad \vec{E}_r(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0 \quad r, s = 1, 2$$

- IL CAMPO \vec{A} SI PUÒ SVILUPPARE IN SERIE DI FOURIER

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_r \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{E}_r(\vec{k}) \left[a_r(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_r^*(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

DOVE $\omega_{\vec{k}} = c |\vec{k}|$

- SOSTITUENDO $\vec{A}(x, t)$ NELL'EQUAZIONE $\square \vec{A} = 0$ SI OTTIENE

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_r(\vec{k}, t) = -\omega_k^2 Q_r(\vec{k}, t)$$

$$\rightarrow Q_r(\vec{k}, t) = Q_r(\vec{k}) e^{-i\omega_k t}$$

- L'ENERGIA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO SI PUO' ESPRIMERE COME :

$$H_{\text{rad}} = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \omega_k Q_r^*(\vec{k}) Q(\vec{k})$$

N.B. QUESTA E' INDIPENDENTE DAL TEMPO, COME CI SI ASPETTA SE NON CI SONO CARICHE E CORRENTI

- LA QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO E.M. SI FA QUANTIZZANDO I SINGOLI MODI DI OSCILLAZIONE

OSCILLATORE ARMONICO

$$H_{osc} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$[q, p] = i\hbar$$

- INTRODUCIAMO GLI OPERATORI:

$$\left. \begin{array}{l} a \\ a^+ \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (m \omega q \pm i p)$$

- SODDISFANO LA RELAZIONE $[a, a^+] = 1$

$$H_{osc} = \frac{1}{2} \hbar \omega (a^+ a + a a^+) = \hbar \omega (a^+ a + \frac{1}{2})$$

- DA NOTARE CHE:

$$a^+ a \equiv N \quad ; \quad \text{definito positivo;}$$

conta il numero di quanti nello stato

$$\langle \psi | N | \psi \rangle = \langle \psi | a^+ a | \psi \rangle = \langle a \psi | a \psi \rangle \geq 0$$

\Rightarrow N POSSIÈDE UN AUTOVALORE MINIMO NON NEGATIVO

$$\alpha_0 \geq 0$$

- DALL'EQUAZIONE DEGLI AUTOVALORI SEGUE:

$$N |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

\uparrow numero di quanti nello stato

- UTILIZZANDO LE REGOLE DI COMMUTAZIONE SI TROVA:

$$N Q |\alpha\rangle = (\alpha-1) Q |\alpha\rangle ; N Q^+ |\alpha\rangle = (\alpha+1) Q^+ |\alpha\rangle$$

OVVERO $Q |\alpha\rangle$ E $Q^+ |\alpha\rangle$ SONO AUTOFUNZIONI DI N CON AUTOVALORI $\alpha-1$ E $\alpha+1$ RISPETTIVAMENTE

- DATO CHE α_0 È L'AUTOVALORE PIÙ PICCOLO, DOBBIAMO AVERE:

$$Q |\alpha_0\rangle = 0$$

$$\text{E DATO CHE } Q^+ Q |\alpha_0\rangle = \alpha_0 |\alpha_0\rangle \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

\Rightarrow GLI AUTOVALORI DI N SONO GLI INTERI $n=0, 1, 2, \dots$

- PER NORMALIZZARE GLI STATI A 1, DOBBIAMO AVERE:

$$\langle n | n \rangle = 1 \Rightarrow Q |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle ; Q^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

- SE $\langle 0 | 0 \rangle = 1 \Rightarrow$ GLI AUTOSTATI DI N NORMALIZZATI SONO

$$|n\rangle = \frac{(Q^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle ; n=0, 1, 2, \dots$$

QUESTE SONO LE AUTOFUNZIONI DELL'OSCILLATORE ARMONICO, AVENTI I SEGUENTI AUTOVALORI PER L'ENERGIA:

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n=0, 1, 2, \dots$$

- GLI OPERATORI Q E Q^+ SONO CHIAMATI OPERATORI DI ABBASSAMENTO E DI INNALZAMENTO
- NELLA TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI $|n\rangle$ RAPPRESENTA UNO STATO CON n QUANTI
 - L'OPERATORE a ANNICHILA UN QUANTO, MENTRE L'OPERATORE Q^+ CREA UN QUANTO
- N.B. È CONVENIENTE VEDERE GLI OPERATORI NELLO SCHEMA DI HEISENBERG, DOVE GLI OPERATORI SONO FUNZIONI DEL TEMPO

- IN PARTICOLARE

$$i\hbar \frac{dQ(t)}{dt} = [Q(t), H_{\text{occ.}}] \quad \text{CON } Q(t=0) = Q$$

$$\Rightarrow \frac{dQ(t)}{dt} = -i\omega Q(t)$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q e^{-i\omega t}$$

IL CAMPO DI RADIAZIONE QUANTIZZATO

- QUANTO DETTO PER L'OSCILLATORE ARMONICO SI PUO' ESTENDERE AL CAMPO DI RADIAZIONE, INTRODUCENDO DELLE RELAZIONI DI COMMUTAZIONE

$$\begin{cases} [Q_r(\vec{k}), Q_s^+(\vec{k}')] = \delta_{rs} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ [Q_r(\vec{k}), Q_s(\vec{k}')] = [Q_r^+(\vec{k}), Q_s^+(\vec{k}')] = 0 \end{cases}$$

- L'HAMILTONIANA SI PUO' RISCRIVERE COME:

$$H_{\text{rad}} = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \omega (\alpha_r^+(\vec{k}) \alpha_r(\vec{k}) + \frac{1}{2})$$

- L'OPERATORE $N_r(\vec{k}) = \alpha_r^+(\vec{k}) \alpha_r(\vec{k})$ HA AUTOVALORI $0, 1, 2, \dots$ E AUTOFUNZIONI DELLA FORMA:

$$|n_r(\vec{k})\rangle = \frac{[\alpha_r^+(\vec{k})]^{n_r(\vec{k})}}{\sqrt{n_r(\vec{k})!}} |0\rangle$$

- LE AUTOFUNZIONI DELL'HAMILTONIANA DI RADIAZIONE SONO PRODOTTI DI QUESTI STATI:

$$|\dots n_r(\vec{k}) \dots\rangle = \prod_{\vec{k}_i} \prod_{r_i} |n_{r_i}(\vec{k}_i)\rangle$$

CON ENERGIA

$$\sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \omega_{\vec{k}} (n_r(\vec{k}) + \frac{1}{2})$$

- GLI OPERATORI $Q_r(\vec{k})$, AGENDO SULLO STATO $|\dots n_r(\vec{k}) \dots\rangle$ RIDUCONO IL NUMERO DI OCCUPAZIONE $n_r(\vec{k})$ DEL MODO (\vec{k}, r) DI UN'UNITA', LASCIANDO GLI ALTRI NUMERI DI OCCUPAZIONE INALTERATI

$$Q_r(\vec{k}) |\dots n_r(\vec{k}) \dots\rangle = \sqrt{n_r(\vec{k})} |\dots; n_r(\vec{k})-1, \dots\rangle$$

- L'ENERGIA DELLO STATO E' RIDOTTA DI $\hbar\omega = \hbar c |\vec{k}|$

- $Q_r(\vec{k})$ E' L'OPERATORE DI ANNICILAZIONE (DISTRUZIONE, ASSORBIMENTO) DI UN FOTONE NELLO STATO (\vec{k}, r) , OVVERO DI MOMENTO $\hbar\vec{k}$ E ENERGIA $\hbar\omega_k$ E VETTORE DI POLARIZZAZIONE $\vec{e}_r(\vec{k})$
- IN MANIERA ANALOGA $Q_r^+(\vec{k})$ E' L'OPERATORE DI CREAZIONE
- N.B. I FOTONI SONO BOSONI, QUINDI IN UN DETERMINATO STATO VI POSSONO ESSERE 0, 1, 2, ... N FOTONI.
NEL CASO DEI FERMIONI IL NUMERO DI OCCUPAZIONE E' LIMITATO A 0 E 1. IN QUEL CASO BISOGNERA' INTRODURRE DELLE REGOLE DI ANTICOMMUTAZIONE
- N.B. NELLA MEC. QUANT. RELATIVISTICA LE AMPIEZZE (E QUINDI I CAMPI) SONO OPERATORI MENTRE LE POSIZIONI ED IL TEMPO SONO NUMERI ORDINARI. NELLA MEC. QUANT. NON REL. SONO LE POSIZIONI (MA NON IL TEMPO) AD ESSERE DEGLI OPERATORI

SECONDA QUANTIZ. EQ. DI DIRAC

- LE DUE SOLUZIONI $U(P)$ SONO ASSOCIATE ALL'ONDA PIANA e^{-iPx} ED HANNO IMPULSO $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$ E ENERGIA $E > mc^2$

LE SOLUZIONI $V(P)$ SONO ASSOCIATE ALL'ONDA PIANA e^{iPx} , ED HANNO IMPULSO $-\vec{p}$ E ENERGIA $-E$

- ESPANSIONE IN SERIE DI FOURIER DELLA $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1}^2 \left[a_{pr} u_r(p) e^{-iPx} + b_{pr}^+ v_r(p) e^{+iPx} \right]$$

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

- PER L'AGGIUNTO SI PUO' SCRIVERE:

$$\bar{\Psi}(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1}^2 \left[a_{pr}^+ \bar{u}_r(p) e^{+iPx} + b_{pr} \bar{v}_r(p) e^{-iPx} \right]$$

- BISOGNA INTRODURRE DELLE REGOLE DI ANTICOMMUTAZIONE PER LE VARIABILI DEL CAMPO:

$$\{a_{pr}, a_{p'r'}^+\} = \delta(p-p') \delta_{rr'}$$

$$\{b_{pr}, b_{p'r'}^+\} = \delta(p-p') \delta_{rr'}$$

- GLI OPERATORI a, a^+, b, b^+ POSSONO ESSERE INTERPRETATI COME OPERATORI DI CREAZIONE E DISTRUZIONE

a_{pr} DISTRUGGE UNA PARTICELLA DI MOMENTO \vec{p} E ENERGIA E

a_{pr}^+ CREA " " " " \vec{p} " E

b_{pr} CREA " " " " $-\vec{p}$ " $-E$

b_{pr}^+ DISTRUGGE " " " " $-\vec{p}$ " $-E$

(L'INDICE r SI RIFERISCE ALLO SPIN)

a_{pr} DISTRUGGE ELETTRONI

a_{pr}^+ CREA ELETTRONI

b_{pr} DISTRUGGE POSITRONI

b_{pr}^+ CREA POSITRONI

TUTTI DI IMPULSO \vec{p}
E ENERGIA E

QUINDI

$\psi(x)$ DISTRUGGE ELETTRONI O CREA POSITRONI
NEL PUNTO x

$\bar{\psi}(x)$ CREA ELETTRONI O DISTRUGGE POSITRONI
NEL PUNTO x

FORMULAZIONE LAGRANGIANA

- CONSIDERIAMO I CAMPI IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIO COME LE VARIABILI DINAMICHE DA QUANTIZZARE. PER FARE CIÒ SI INTRODUCE UNA LAGRANGIANA (PER MEGLIO DIRE, UNA DENSITA' DI LAGRANGIANA)
- SI INTRODUCONO I MOMENTI CONIUGATI DEI CAMPI E SI IMPONONO LE REGOLE DI COMMUTAZIONE AI CAMPI E AI LORO MOMENTI
- CLASSICAMENTE LA LAGRANGIANA È DEFINITA COME:

$$L = K - V$$

LA LAGRANGIANA È UNA FUNZIONE DELLE COORDINATE q_i (x, y, z) E DELLE LORO DERIVATE TEMPORALI \dot{q}_i ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$)

- NELLA LAGRANGIANA LA LEGGE FONDAMENTALE DEL MOTO È L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

IN COORDINATE CARTESIANE ABBIAMO:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial K}{\partial v_x} = m v_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

E COME SI PUÒ VEDERE SI RITROVA LA LEGGE DI NEWTON (PER I SISTEMI CONSERVATIVI)

LAGRANGIANA NELLA TEORIA RELATIVISTICA

- UNA PARTICELLA PER SUA NATURA È UN'ENTITÀ LOCALIZZATA; NELLA MECCANICA CLASSICA VOGLIAMO RICAVARE LA SUA POSIZIONE IN FUNZIONE DEL TEMPO.
- UN CAMPO INVECE OCCUPA UNA CERTA REGIONE DELLO SPAZIO; NELLA TEORIA DEI CAMPI CI INTERESSA CONOSCERE UNA O PIÙ FUNZIONI DELLA POSIZIONE E DEL TEMPO: $\phi_i(x, y, z, t)$
- LE VARIABILI DEL CAMPO POSSONO ESSERE, AD ESEMPIO, LA TEMPERATURA DI UNA STANZA O IL POTENZIALE ELETTRICO V
- NELLA TEORIA DEI CAMPI SI PARTE DA UNA DENSITA' DI LAGRANGIANA \mathcal{L} [$\mathcal{L} = \frac{dL}{dV}$] CHE È UNA FUNZIONE DEI CAMPI ϕ_i E DELLE LORO DERIVATE RISPETTO A x, y, z, t

$$\partial_\mu \phi_i \equiv \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu}$$

- NELLA TEORIA DEI CAMPI L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE SI GENERALIZZA IN QUESTO MODO:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

- SI PUÒ DEFINIRE IL MOMENTO CONIUGATO COME:

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} \quad \left[\dot{\phi}_r = \frac{\partial \phi_r}{\partial t} \right]$$

- DENSITA' DI HAMILTONIANA

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L}$$

ESEMPIO: LAGRANGIANA DEL CAMPO DI KLEIN-GORDON (SPIN 0)

- ABBIAMO UN SOLO CAMPO SCALARE ϕ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

N.B. SE VI MANCA UN FATTORE $\frac{1}{2}$, RICORDATE CHE:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_0 \phi \partial_0 \phi - \partial_1 \phi \partial_1 \phi - \partial_2 \phi \partial_2 \phi - \partial_3 \phi \partial_3 \phi] - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi = \partial^0 \phi \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_1 \phi)} = -\partial_1 \phi = \partial^1 \phi \quad ; \quad \text{etc...}$$

- NEL FRATTEMPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi$$

QUINDI L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE DIVENTA:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi = 0$$

CHE È L'EQUAZIONE DI KLEIN-GORDON CHE DESCRIVE PARTICELLE DI SPIN 0 E MASSA m

ESEMPIO: EQ. DI DIRAC

- CONSIDERIAMO UN CAMPO SPINORIALE Ψ E LA LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L} = i(\hbar c) \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - (mc^2) \bar{\Psi} \Psi$$

- CONSIDERIAMO Ψ E IL SUO AGGIUNTO $\bar{\Psi}$ COME VARIABILI INDIPENDENTI (DATO CHE Ψ È UNO SPINORE COMPLESSO CI SONO 8 CAMPI INDIPENDENTI)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = i \hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - mc^2 \Psi$$

$$\Rightarrow i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right) \Psi = 0 \quad (\text{eq. di DIRAC})$$

- APPLICHIAMO L'EQUAZIONE DI E.L. A Ψ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} = i \hbar c \bar{\Psi} \gamma^\mu \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = -mc^2 \bar{\Psi}$$

$$\Rightarrow i \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right) \bar{\Psi} = 0 \quad (\text{eq. di DIRAC per } \bar{\Psi})$$

ESEMPIO: LAGRANGIANA DI PROCA PER SPIN 1

- PRENDIAMO UN CAMPO VETTORIALE A^μ AVENTE LA LAGRANGIANA SEGUENTE:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu$$

L' EQUAZIONE DI E. L. PRODUCE

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \quad \text{eq. di PROCA}$$

DESCRIVE PARTICELLE DI SPIN 1 E MASSA m

- INTRODUCIAMO LA COMBINAZIONE:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{16} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \quad (\text{eq. di PROCA})$$

N.B. QUESTE SONO LE LAGRANGIANE PER I CAMPI LIBERI, SENZA SORCENTI O INTERAZIONI

LAGRANGIANA DI MAXWELL CON SORGENTE J^μ PER $m = 0$

- PRENDIAMO $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu$

DOVE J^μ È UNA FUNZIONE DATA

- L'EQ. DI E.L. PRODUCE

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \rightarrow \text{forma tensoriale delle equazioni di Maxwell}$$

- N.B. DA QUESTA EQUAZIONE SEGUE

$$\partial_\nu J^\nu = 0$$

CIOÈ J^ν DEVE OBBEDIRE ALL'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ'
(LA CARICA ELETTRICA SI DEVE CONSERVARE)

LEGGI DI CONSERVAZIONE

- PER UNA TEORIA DERIVATA DA UNA DENSITA' DI LAGRANGIANA \mathcal{L} , SI POSSONO COSTRUIRE QUANTITA' CONSERVATE DALL' INVARIANZA DI \mathcal{L} PER TRASFORMAZIONI DI SIMMETRIA, CIOE' ABBIAMO EQUAZIONI DELLA FORMA:

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

f^α SONO FUNZIONI DEGLI OPERATORI DI CAMPO E DELLE LORO DERIVATE

- SE DEFINIAMO:

$$F^\alpha(t) = \int d^3x f^\alpha(x, t) \quad (\text{e' integrale e' su tutto lo spazio})$$

L'EQUAZIONE DI CONTINUITA' DIVENTA:

$$\frac{1}{c} \frac{dF^0(t)}{dt} = - \int d^3x \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} f^i(x, t) = 0$$

(l'uguaglianza deriva dal teorema delle divergenze :
integrale di volume \leftrightarrow integrale di superficie)

$$\Rightarrow F^0 = \int d^3x f^0(x, t) \text{ E' LA QUANTITA' CONSERVATA}$$

$f^\alpha(x)$ SI DEFINISCE ANCHE CORRENTE CONSERVATA

- IL FATTO CHE DA UN' INVARIANZA DERIVI UNA GRANDEZZA CONSERVATA E' CONOSCIUTO COME TEOREMA DI NOETHER

QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO DI KLEIN - GORDON

- LAGRANGIANA

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2$$

- CAMPO CONIUGATO DI ϕ

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x)$$

- IL CAMPO REALE ϕ DIVENTA UN OPERATORE HERMITIANO $\phi^\dagger = \phi$ CHE SODDISFA ALLE SEGUENTI REGOLE DI COMMUTAZIONE:

$$\begin{cases} [\phi(x, t), \dot{\phi}(x', t)] = i \hbar c^2 \delta(x - x') \\ [\phi(x, t), \phi(x', t)] = [\dot{\phi}(x, t), \dot{\phi}(x', t)] = 0 \end{cases}$$

- PER STABILIRE LA CORRISPONDENZA CON LE PARTICELLE, SI SVILUPPA $\phi(x)$ IN UN SET COMPLETO DI SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI KLEIN - GORDON

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$$

DOVE

$$\phi^+(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)} a(\mathbf{k}^{\rightarrow}) e^{-i\mathbf{k}x} \quad k_0 = \frac{1}{c} \omega_{\mathbf{k}}$$

$$\phi^-(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} a^\dagger(\mathbf{k}^{\rightarrow}) e^{i\mathbf{k}x} \quad E = \hbar \omega = \sqrt{\omega^2 c^4 + c^2 (\hbar \mathbf{k}^{\rightarrow})^2}$$

- $a(\mathbf{k}^{\rightarrow})$ e $a^\dagger(\mathbf{k}^{\rightarrow})$ STESSE REGOLE DI COMMUTAZ. OSC. ARM.

$$\begin{cases} [a(\mathbf{k}^{\rightarrow}), a^\dagger(\mathbf{k}'^{\rightarrow})] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}^{\rightarrow}), a^\dagger(\mathbf{k}'^{\rightarrow})] = 0 \end{cases}$$

MATRICI S (ALTARELLI)

- PERTURBAZIONI DIPENDENTI DAL TEMPO

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle = H |\Psi_S(t)\rangle \Rightarrow |\Psi_S(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\Psi_S(0)\rangle$$

$$\langle \Psi_S(t) | \bar{F}_S | \phi_S(t) \rangle \equiv \langle \Psi_S(0) | e^{\frac{i H t}{\hbar}} F_S e^{-\frac{i H t}{\hbar}} | \phi_S(0) \rangle$$

↑ operatore di Schrödinger

$$\Rightarrow |\Psi_H\rangle \equiv |\Psi_S(0)\rangle \quad \text{Stato di Heisenberg}$$

$$\bar{F}_H = e^{\frac{i H t}{\hbar}} F_S e^{-\frac{i H t}{\hbar}} \quad \text{operatore di Heisenberg}$$

$$\dot{\bar{F}}_H = \frac{i}{\hbar} [H, \bar{F}_H] \quad \text{derivata dell'operatore rispetto al tempo (eq. del m.o.)}$$

- VEDIAMO LA RAPPRESENTAZIONE DI INTERAZIONE O DI DIRAC SE H È DECOMPOBIBILE IN $H_0 + V$, VOGLIAMO VEDERE SE È POSSIBILE TROVARE DEGLI STATI $|\Psi_I(t)\rangle$ LA CUI EVOLUZIONE TEMPORALE SIA:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle = V_I |\Psi_I(t)\rangle$$

IN MODO CHE GLI STATI SIANO COSTANTI NEL TEMPO IN ASSENZA DI INTERAZIONI.

- VOGLIAMO CHE: $|\Psi_I(t)\rangle = U |\Psi_S(t)\rangle$ U è unitari.

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle = V_I |\Psi_I(t)\rangle \equiv V_I U |\Psi_S(t)\rangle$$

↓ svolgiamo la derivata

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle + i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle$$

$$\hookrightarrow U (H_0 + V_S) |\Psi_S(t)\rangle$$

- METTENDO INSIEME I VARI PEZZI

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle + U(H_0 + V_S) U^\dagger |\Psi_S(t)\rangle = V_I U |\Psi_S(t)\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle + U H_0 U^\dagger U |\Psi_S(t)\rangle + U V_S U^\dagger U |\Psi_S(t)\rangle = V_I U |\Psi_S(t)\rangle$$

$$\text{SE } V_I = U V_S U^\dagger$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle + U H_0 |\Psi_S(t)\rangle = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = -U H_0 = -H_0 U \leftarrow (\text{se } H_0 \text{ e } U \text{ commutano})$$

$$\Rightarrow U = e^{i \frac{H_0}{\hbar} (t-t_0)} ; U(t_0) = 1$$

$$V_I = e^{i \frac{H_0 t}{\hbar}} V_S e^{-i \frac{H_0 t}{\hbar}}$$

- VOGLIAMO CHE $|\Psi_I(t)\rangle = S(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$

LA MATRICE S FA EVOLVERE LO STATO DAL TEMPO t_0 AL TEMPO t

- SCRIVIAMO L'EVOLUZIONE TEMPORALE:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle = V_I |\Psi_I(t)\rangle = V_I S(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (S(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle) = V_I S(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} |\Psi_I(t_0)\rangle = V_I S(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = V_I \cdot S \Rightarrow S(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') dt' \right]$$

$$S(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') dt' \right]$$

- QUESTA NON È ANCORA LA SOLUZIONE PERCHÉ A TEMPI DIVERSI NON È DETTO CHE I V_I COMMUTANO, QUINDI VI DEVE ESSERE UNA PROCEDURA DI ORDINAMENTO TEMPORALE

$$S(t, t_0) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') dt' \right]$$

- TRASFORMIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE IN ES. INTEGRALE

$$S(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') S(t', t_0) dt'$$

QUESTA SI PUÒ RISOLVERE PER ITERAZIONI SUCCESSIVE

$$S^0(t_0, t_0) = 1$$

$$S^1(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) \cdot 1$$

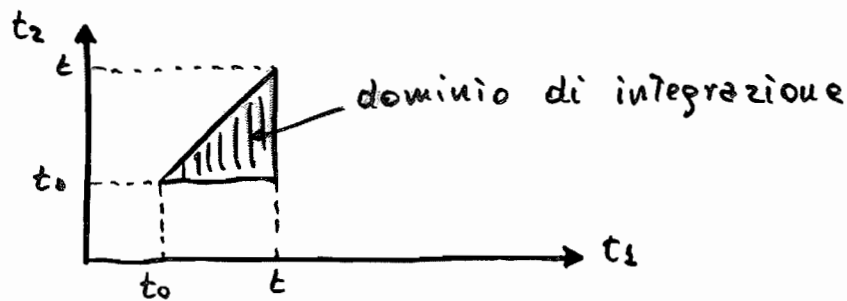
$$S^2(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_2) + \dots$$

- LA PROCEDURA DI ORDINAMENTO TEMPORALE È LA SUCCESSIONE CRONOLOGICA; IL TEMPO PIÙ GRANDE (OVVERO SUCCESSIVO) A SINISTRA ED IL TEMPO PIÙ PICCOLO (OVVERO QUELLO PRECEDENTE) A DESTRA

$$T(V_I(t_1) \cdot V_I(t_2)) = \begin{cases} V_I(t_1) \cdot V_I(t_2) & t_1 > t_2 \\ V_I(t_2) \cdot V_I(t_1) & t_2 > t_1 \end{cases}$$

QUINDI ABBIAMO

$$\left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T[V_I(t_1) \cdot V_I(t_2)]$$



- DATO CHE IL TIME ORDER PRODUCT È SIMMETRICO, POSSO ESTENDERE L'INTEGRALE E DIVIDERE PER 2

$$\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T[V_I(t_1) \cdot V_I(t_2)] = \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 T[V_I(t_1) \cdot V_I(t_2)]$$

- QUESTO SI PUÒ ESTENDERE A TUTTI GLI ORDINI E SI PUÒ SCRIVERE:

$$S(t, t_0) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') dt' \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T[V_I(t_1) \dots V_I(t_n)]$$

- QUELLO CHE INTERESSA È CONSIDERARE QUESTO OPERATORE TRA I TEMPI $-\infty$ E $+\infty$; CIOÈ ABBIAMO UNO STATO LIBERO $|i\rangle$ E VOGLIAMO CONOSCERE COME EVOLVE DOPO L'INTERAZIONE

$$|\phi(\infty)\rangle = S(\infty, -\infty) |i\rangle$$

- SE VOGLIAMO L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ DI TROVARE UNO STATO $|f\rangle$, SI HA:

$$\langle f | \phi(\infty) \rangle = \langle f | S(\infty, -\infty) | i \rangle = \langle f | S | i \rangle$$

$$S = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' V_I(t') \right]$$

- TUTTE LE HAMILTONIANE SONO OTTENUTE INTEGRANDO IN d^3x LA DENSITA' DI HAMILTONIANA \mathcal{H}

$$V_I(t) = \int d^3x \mathcal{H}_I(x^0, t)$$

$$\Rightarrow S = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{H}_I(x^0, t) \right]$$

- VOGLIAMO CALCOLARE $\langle f | S | i \rangle$

RICORDIAMO I PRODOTTI NORMALI (Normal Order Product)

$$N(\phi_1(x_1) \cdot \phi_2(x_2)) \equiv : \phi_1(x_1) \cdot \phi_2(x_2) :$$

$\phi = \phi^+ + \phi^-$ $\phi^+ \rightarrow$ "energie positive": contiene operatori di distruzione

$\phi^- \rightarrow$ "energie negative" contiene operatori di creazione

$$: \phi_1(x_1) \cdot \phi_2(x_2) : = \phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^- + \eta \phi_2^- \phi_1^+ \quad \eta = \begin{cases} +1 & \text{bosoni} \\ -1 & \text{fermioni} \end{cases}$$

\hookrightarrow distruzione a destra e creazione a sinistra

- SUPPONIAMO DI AVERE UNA STRINGA DI CAMPI:

$N(A_1 A_2 \dots A_n)$ con A indico ϕ^\pm , cioe' contiene un solo tipo di campo

$$N(A_1 A_2 \dots A_n) = (-1)^P A_{i_1} \cdot A_{i_2} \dots A_{i_n} \quad P \text{ e' il numero di scambi dei campi fermionici}$$

- VALE LA LEGGE DISTRIBUTIVA

$$N(A_1 A_2 + \dots B_1 B_2 + \dots) = N(A_1 A_2) + N(B_1 B_2) + \dots$$

- IL METODO DI ESPANDERE LA MATRICE S COME SOMMA DI PRODOTTI NORMALI E' DOVUTO A DYSON E WICK

RIVEDIAMO IL TIME ORDER PRODUCT

$$T[\phi_1(x_1) \cdot \phi_2(x_2)] = \begin{cases} \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) & \text{se } x_1^0 > x_2^0 \\ \eta \phi_2(x_2) \phi_1(x_1) & \text{se } x_2^0 > x_1^0 \end{cases} \quad \eta = \begin{cases} +1 & \text{bosoni} \\ -1 & \text{fermioni} \end{cases}$$

$$T(\phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n)) = (-1)^P \phi_{i_1}(x_{i_1}) \cdots \phi_{i_n}(x_{i_n})$$

$$x_{i_1}^0 > x_{i_2}^0 > \cdots > x_{i_n}^0$$

$\langle f | S | i \rangle$ SARA' DEL TIPO:

$$\langle 0 | \Omega_1 \Omega_2 \Omega^\dagger \Omega^\dagger \Omega \Omega^\dagger \Omega_2^\dagger | 0 \rangle \leftarrow \text{si crea uno stato partendo dal vuoto}$$

- L'ORDINAMENTO NORMALE È ABBASTANZA FACILE DA TRATTARE, COSÌ NON È PER IL PRODOTTO CRONOLOGICO, QUINDI DOBBIAMO RIDURLI A PRODOTTI NORMALI, MEDIANTE IL CALCOLO COMBINATORIO
- TEOREMA DI WICK

$$T[\phi_1(x_1) \phi_2(x_2)] = N[\phi_1(x_1) \phi_2(x_2)] + \langle 0 | T(\phi_1(x_1) \phi_2(x_2)) | 0 \rangle$$

- L'ELEMENTO DI MATRICE $\langle 0 | T(\phi_1 \phi_2) | 0 \rangle$ SI CHIAMA CONTRAZIONE OPPURE PROPAGATORE DEI DUE CAMPI

$$\langle 0 | T(\phi_1 \cdot \phi_2) | 0 \rangle = \underbrace{\phi_1 \phi_2}$$

IL PROPAGATORE È SEMPRE ZERO A MENO CHE UN OPERATORE CREA UNA PARTICELLA CHE L'ALTRO RIASSORBE

- INTRODUCIAMO UNA NOTAZIONE SEMPLIFICATORIA

$$N[\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \cdots \phi_{n-1}} \cdot \phi_n] = (-1)^P \underbrace{\phi_2 \phi_4} \underbrace{\phi_3 \phi_{n-1}} N[\phi_1 \phi_5 \cdots \phi_n]$$

- IL T DI UNA STRINGA DI CAMPI È UGUALE AD UNA SOMMA DI N CON TUTTE LE CONTRAZIONI POSSIBILI

$$T(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_n) = N(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_n) + N(\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_n}) + N(\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_n})$$

- DATO CHE I CAMPI SONO n LE CONTRAZIONI POSSIBILI SONO $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, POI DEVO AGGIUNGERE GLI N CHE HANNO DUE CONTRAZIONI, POI I TERMINI CON TRE CONTRAZIONI, FINCHE' ARRIVO ALLA SITUAZIONE IN CUI TUTTI I CAMPI SONO CONTRATTI SE n È PARI, OPPURE NELL'ULTIMO TERMINE PUO' ESSERE SOLO UN CAMPO SE n È DISPARI

- DOBBIAMO ORA TROVARE QUANTO VALE LA CONTRAZIONE

- IL COMMUTATORE TRA DUE CAMPI È UN NUMERO

$$\begin{aligned} [\psi_1^+, \psi_2^-]_{\pm} &= \langle 0 | [\psi_1^+, \psi_2^-] | 0 \rangle = \langle 0 | \psi_1^+ \psi_2^- \pm \psi_2^- \psi_1^+ | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \psi_1^+ \psi_2^- | 0 \rangle = \langle 0 | \psi_1 \psi_2 | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | T(\psi_2, \psi_1) | 0 \rangle \end{aligned}$$

= 0 perché contiene oper. di distruzione

- LA CONTRAZIONE VA VALUTATA A TEMPI DIVERSI
- ESSA VALE SEMPRE ZERO, A MENO CHE UN CAMPO CREA UNA PARTICELLA CHE L'ALTRO ASSORBE

MATRICE S (MANDL)

- CONSIDERIAMO IL CASO REALISTICO IN CUI LE PARTICELLE VENGONO CREATE, DISTRUITE ED INTERAGISCONO
- IL PROBLEMA SI RIESCE A TRATTARE SOLO NELLA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI DIVIDENDO L'HAMILTONIANA NELLA H DI CAMPI LIBERI PIU UN H DI INTERAZIONE

$$H = H_{free} + H_{int}$$

N.B. SI PASSA CONTINUAMENTE DALLA FORMULAZIONE HAMILTONIANA A QUELLA LAGRANGIANA; BISOGNA RICORDARE CHE:

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi_r \dot{\psi}_r - \mathcal{L} \quad ; \quad H_F(x) = -\mathcal{L}_F(x)$$

N.B. LO SCHEMA DELLA RAPPRESENTAZIONE DI INTERAZIONE NON VA BENE PER DESCRIVERE STATI LEGATI, MA VA MOLTO BENE PER DESCRIVERE PROCESSI DI SCATTERING

- IN UN PROCESSO DI COLLISIONE LO STATO $|i\rangle$ ($t_i = -\infty$) E' SPECIFICATO DANDO IL NUMERO DI PARTICELLE, CON BEN DEFINITE PROPRIETA' E DISTANZI TRA DI LORO
- NEL PROCESSO DI COLLISIONE LE PARTICELLE SI AVVICINANO, INTERAGISCONO E POI SI ALLONTANANO NUOVAMENTE

$$|\phi(\infty)\rangle = S |\phi(-\infty)\rangle = S |i\rangle$$

LA COLLISIONE PUO' PORTARE A DIVERSI STATI $|f\rangle$ E TUTTE QUESTE POSSIBILITA' SONO CONTENUTE ENTRO $|\phi(\infty)\rangle$

- LA PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE DALLO STATO INIZIALE $|i\rangle$ AD UNO STATO FINALE $|f\rangle$ È DATA DA:

$$|\langle f | \phi(\infty) \rangle|^2 \quad (\text{si assume che gli stati siano tutti normalizzati a 1})$$

- LA CORRISPONDENTE AMPIEZZA DI PROBABILITÀ È:

$$\langle f | \phi(\infty) \rangle = \langle f | S | i \rangle \equiv S_{fi}$$

- SE ESPANDIAMO $|\phi(\infty)\rangle$ IN TERMINI DI UN SET COMPLETO DI STATI ORTONORMALI, ABBIAMO:

$$|\phi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f | \phi(\infty) \rangle = \sum_f |f\rangle S_{fi}$$

- L'UNITARIETÀ DELLA MATRICE S PUÒ ESSERE SCRITTA COME:

$$\sum_f |S_{fi}|^2 = 1$$

QUESTA ESPRIME LA CONSERVAZIONE DELLA PROBABILITÀ, È PIÙ GENERALE DELLA CORRISPONDENTE CONSERVAZIONE DELLE PARTICELLE NELLA MEC. QUANT. NON REL. PERCHÉ ADESSO LE PARTICELLE POSSONO ESSERE CREATE E DISTRUTTE

N.B. PER $t \rightarrow \infty$, NELLA FORMULAZIONE DI DYSON DOVE ABBIAMO LA DENSITÀ DI HAMILTONIANA, SI HA:

$$S = \sum_0^\infty \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n T \{ \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n) \}$$

(l'integrazione è fatta sullo spazio a 4 dimensioni)

- DATO UN PARTICOLARE PROCESSO, SOLTANTO ALCUNI ELEMENTI DELLA MATRICE S CONTRIBUISCONO, VALGONO QUELLI CHE CONTENGONO IL GIUSTO NUMERO DI OPERATORI DI DISTURBO E CREAZIONE

QED

- CONSIDERIAMO L'INTERAZIONE DI ELETTRONI-POSITRONI CON UN CAMPO e.m.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

$$\mathcal{L}_0 = N \left[\bar{\Psi}(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) - \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\nu A^\mu(x)) \right]$$

$$\mathcal{L}_I = N \left[-S^\mu(x) A_\mu(x) \right] = N \left[e \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \Psi(x) \right]$$



Normal Order Product, ovvero gli operatori di creazione a sinistra e quelli di distruzione a destra

- $H_I(x) = -\mathcal{L}_I(x) = -e N \left[\bar{\Psi}(x) A(x) \Psi(x) \right] =$

- $= -e N \left[(\bar{\Psi}^+ + \bar{\Psi}^-) (A^+ + A^-) (\Psi^+ + \Psi^-) \right]_x$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
 assorbe crea assorbe crea assorbe crea
 posit. elec. fotone fotone elec. posit.

- FACCIAMO L'ESEMPIO DELLO SCATTERING COMPTON

$$\begin{array}{ccc}
 e^- + \gamma & \rightarrow & e^- + \gamma \\
 \uparrow \quad \uparrow & & \downarrow \quad \uparrow \\
 \text{VAUO} & \text{CREATI} & \text{VAUO} & \text{DISTRUTTI}
 \end{array}$$

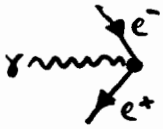

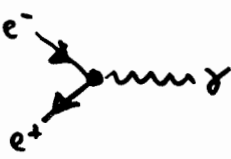




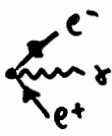
DATO CHE LE PARTI NEGATIVE (POSITIVE) DELLE FREQUENZE $A^-, \bar{\Psi}^-, \Psi^-$ ($A^+, \bar{\Psi}^+, \Psi^+$) SONO LINEARI NEGLI OPERATORI DI CREAZIONE (ASSORBIMENTO) PER FOTONI, ELETTRONI E POSITRONI RISPETTIVAMENTE, IL SOLO PRODOTTO NORMALE CHE CONTRIBUISCE ALLO SCATTERING COMPTON E' :

$$\begin{array}{cccc}
 \bar{\Psi}^- & A^- & \Psi^+ & A^+ \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \text{crea} & \text{crea} & \text{dist.} & \text{dist.} \\
 \text{elec.} & \text{fotone} & \text{elec.} & \text{fotone}
 \end{array}$$

DIAGRAMMI DI FEYNMAN QED

$$H_I = -eN \{ (\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-) (A^+ + A^-) (\psi^+ + \psi^-) \}$$

MOLTIPLICANDO TRA DI LORO GLI OPERATORI SI HANNO 8 PROCESSI

	$\longrightarrow t$	
$\bar{\psi}^+ A^+ \psi^+$		vengono distrutte tutte e 3 le particelle
$\bar{\psi}^+ A^+ \psi^-$		scattering di un positrone
$\bar{\psi}^+ A^- \psi^+$		annichilazione e+e-
$\bar{\psi}^+ A^- \psi^-$		scattering di un positrone
$\bar{\psi}^- A^+ \psi^+$		scattering di un elettrone
$\bar{\psi}^- A^+ \psi^-$		produzione di coppie
$\bar{\psi}^- A^- \psi^+$		scattering di un elettrone
$\bar{\psi}^- A^- \psi^-$		vengono create tutte e 3 le particelle

- TUTTI QUESTI PROCESSI NON CONSERVANO IL QUADRIIMPULSO AL VERTICE QUINDI NON POSSONO AVVENIRE. PER AVERE DEI PROCESSI REALI OCCORRE COMBINARE DUE VERTICI DI QUESTO TIPO, CIOE' ANDARE ALL'ESPRESSIONE AL SECONDO ORDINE DELLA MATRICE S

$$\Rightarrow \langle f | S^{(1)} | i \rangle = 0 \Rightarrow \langle f | S^{(2)} | i \rangle$$

QED : SECONDO ORDINE

$$S^{(2)} = \sum_{i=A}^F S_i^{(2)}$$

dove:

$$S_A^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N [(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}] \leftarrow \text{non serve a niente (non ci sono propagatori)}$$

$$S_B^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ N [(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}] + N [(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}] \right\}$$

$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N [(\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}]$$

$$S_D^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ N [(\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}] + N [(\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}] \right\}$$

$$S_E^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N [(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}]$$

$$S_F^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 (\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}$$

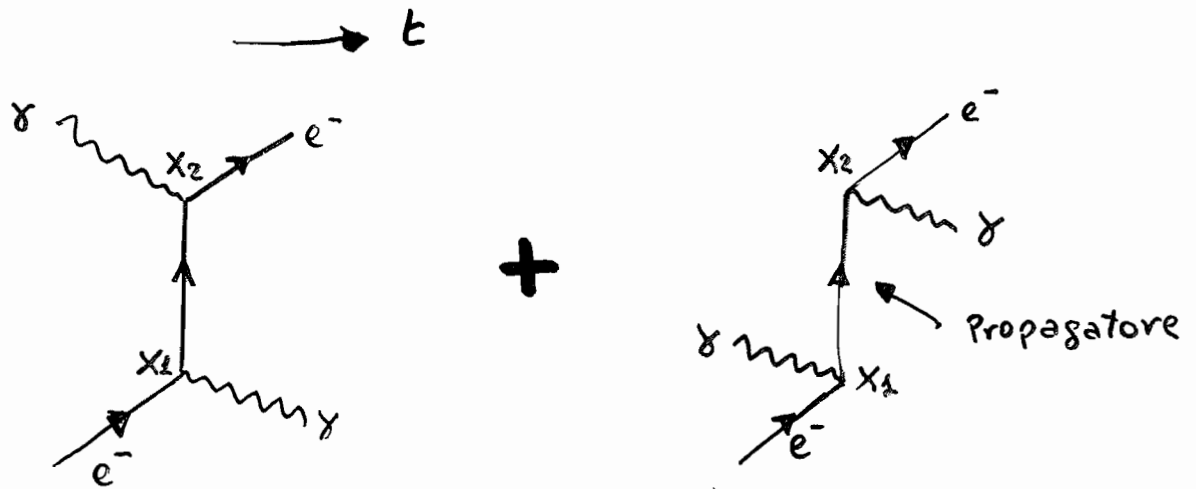
N.B. I DUE TERMINI IN $S_B^{(2)}$ SONO IN LINEA DI PRINCIPIO DIVERSI PERCHÉ I CAMPI FERMIONICI ANTI COMMUTANO, MA DATO CHE PER ANDARE DA UN TERMINE ALL'ALTRO OCCORRE FARE UN NUMERO DI PERMUTAZIONI PARI, ESSI SONO UGUALI

$$\Rightarrow S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N [(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}]$$

N.B. NELLA MATRICE S NON C'È PIÙ IL TIME ORDER PRODUCT, QUINDI NON BISOGNA PIÙ PREOCCUPARSI DEL PROCESSO CHE AVVIENE PRIMA È DI QUELLO CHE AVVIENE DOPO; QUESTO È PRESO AUTOMATICAMENTE IN CONSIDERAZIONE DAL PROPAGATORE

COMPTON SCATTERING

$$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$$

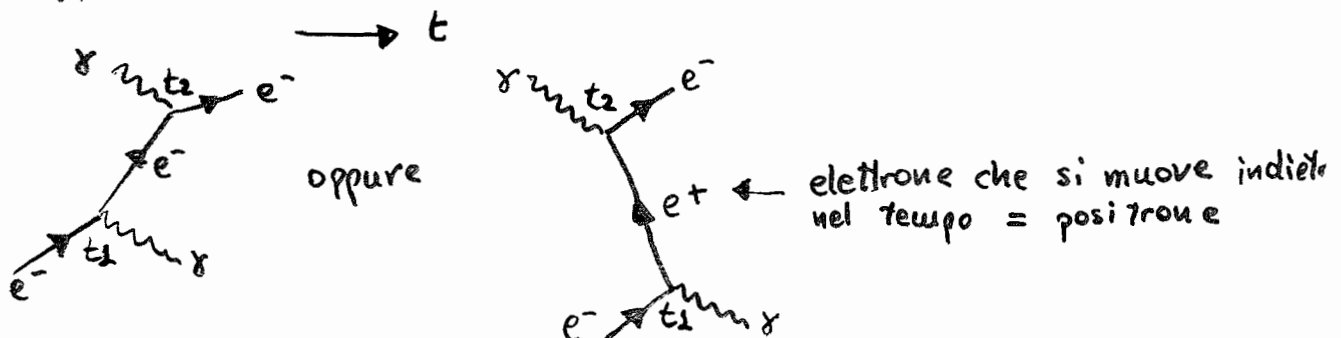


- IL FOTONE PUO' ESSERE DISTRUTTO IN X_2 E CREATO IN X_1 O VICEVERSA
- IL PROPAGATORE CONNETTE SEMPRE DUE VERTICI ED E' UNA PARTICELLA VIRTUALE; VUOL DIRE CHE NON RISPETTA LA RELAZIONE

$$E^2 - p^2 \neq m^2$$

- DEL CASO DEL PROPAGATORE FERMIONICO, SE $t_1 < t_2$ POSSIAMO PENSARE AL PROPAGATORE COME AD UN ELETTRONE VIRTUALE CHE VA DA X_1 A X_2 , ALTRIMENTI E' UN POSITRONE VIRTUALE

ESEMPIO:



- I GRAFICI SONO COMBINAZIONI DEGLI 8 GRAFICI PRECEDENTI

REGOLE DI FEYNMAN E MATRICI

- IN UNA TRANSIZIONE DALLO STATO INIZIALE $|i\rangle$ ALLO STATO FINALE $|f\rangle$, L'ELEMENTO DI MATRICE S_{fi} SI PUO' SCRIVERE IN QUESTO MODO:

$$\langle f | S | i \rangle = \delta_{fi} - i \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f^{\text{TOT}} - P_i^{\text{TOT}}) \prod_{\text{ext}} \left(\frac{m}{vE} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\text{ext}} \left(\frac{1}{2V\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot M$$

↑
↑
↑
↑

Stato finale uguale a stato iniziale
Conservazione del quadrimomento totale
fattori di normalizzazione

- P_i^{TOT} E P_f^{TOT} SONO I QUADRI-MOMENTI DELLO STATO INIZIALE E FINALE
 - LA PRODUTTORIA E' ESTESA SOLO ALLE GAMBE ESTERNE
 - E E ω SONO LE ENERGIE DEI FERMIONI E FOTONI ESTERNI
 - V E' UN VOLUME DI NORMALIZZAZIONE
 - M E' L'ELEMENTO DI MATRICE CHE PUO' ESSERE OTTENUTO CON LE PRESCRIZIONI DI FEYNMAN. ESSO CONTIENE TUTTA LA DINAMICA DELL'INTERAZIONE
- U.B. IN LETTERATURA COMPARE ANCHE LA MATRICE DI TRANSIZIONE T

$$\langle f | S | i \rangle = \delta_{if} + i (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \langle f | T | i \rangle$$

L'ELEMENTO DI MATRICE T_{fi} E' INVARIANTE SE OPPORTUNAMENTE NORMALIZZATO

REGOLE DI FEYNMAN PER LA QED

1) PER CIASCUN VERTICE SCRIVERE UN FATTORE $i e \gamma^\alpha$ [$e \alpha \mu$]

2) PER CIASCUNA LINEA FOTONICA INTERNA (PROPAGATORE), LABELLATA DAL MOMENTO k , SCRIVERE:

$$i \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}$$


3) PER CIASCUNA LINEA FERMIONICA INTERNA (PROPAGATORE), LABELLATA DAL MOMENTO p , SCRIVERE:

$$i \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad \left[\text{su un altro testo: } i \frac{\gamma^\mu \not{p}_\mu + m}{p^2 - m^2} \right]$$

4) PER CIASCUNA LINEA ESTERNA, SCRIVERE UNO DEI SEGUENTI:

a) ELETTRONE INIZIALE: $u_r(p)$

b) ELETTRONE FINALE: $\bar{u}_r(p)$

c) POSITRONE INIZIALE: $\bar{v}_r(p)$

d) POSITRONE FINALE: $v_r(p)$

e) FOTONE INIZIALE: $\epsilon_\mu(k)$

f) FOTONE FINALE: $\epsilon_\mu(k)$

5) METTERE IN ORDINE I FATTORI SPINORIALI DA DESTRA A SINISTRA

IN MODO DA SEGUIRE IL VERSO DELLE FRECCHE SULLE LINEE FERMIONICHE

6) PER OGNI LOOP FERMIONICO, PRENDERE LA TRACCIA E MOLTIPLICARE PER -1

7) AD OGNI VERTICE SI DEVE CONSERVARE IL QUADRIMPULSO. PER OGNI

QUADRIMOMENTO NON DETERMINATO DALLA REGOLA DI CONSERVAZIONE

FARE L'INTEGRAZIONE $(2\pi)^{-4} \int d^4q$

8) MOLTIPLICARE PER UN FATTORE DI FASE $\delta_p = \pm 1$ IN BASE AL NUMERO

DI SCAMBI FERMIONICI PARI O DISPARI NECESSARI PER IL NORMAL ORDER

PRODUCI

ORDINI SUCCESSIVI E DIVERGENZE

- TORNIAMO AL COMPTON SCATTERING

$$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$$

- NELLA MATRICE S DEVONO "SOPRAVVIVERE" SOLO I SEGUENTI OPERATORI

$$\bar{\Psi} - A^- \Psi + A^+$$

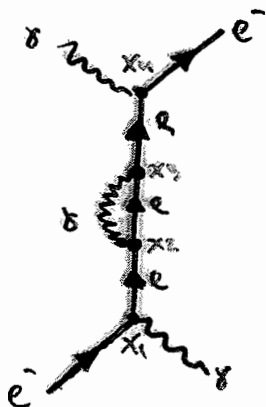
- SCRIVIAMO, COME ESEMPIO, UNO DEI TERMINI DELLO SVILUPPO AL QUARTO ORDINE E FACCIAMO LE CONTRAZIONI:

$$S^{(4)} = \frac{e^4}{4!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 N \left[\underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1}}_{\text{e}} \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_{\text{e}} \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_3}}_{\text{e}} \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_4}}_{\text{e}} \right]$$

(N.B. è solo un esempio illustrativo del concetto, non è rigoroso)

- COMPARIAMO 4 PARTICELLE VIRTUALI: 1 FOTONE E 3 "ELETTRONI"

— ESEMPIO DI DIAGRAMMA DI FEYNMAN

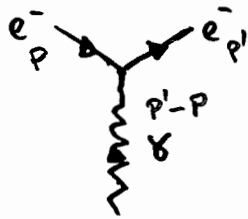


N.B. AD OGNI VERTICE COMPARE UN FATTORE $\sqrt{\alpha}$, QUINDI I DIAGRAMMI DI ORDINE SUPERIORE SONO SOPPRESSI RISPETTO A QUELLO FONDAMENTALE

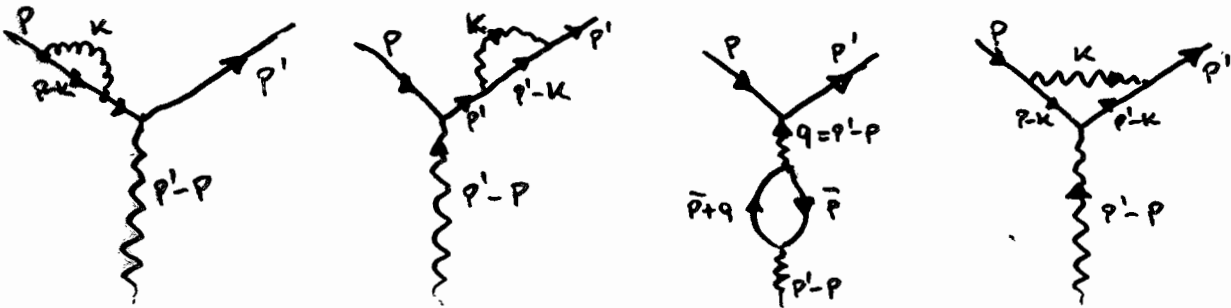
N.N.B. PROBLEMA: I LOG? DAVVO ORIGINI A DELLE DIVERGENZE

CORREZIONI RADIATIVE

- PRENDIAMO IL VERTICE FONDAMENTALE DELLA QED



- VEDIAMO ORA I QUATTRO CONTRIBUTI DELLE CORREZIONI AL SECONDO ORDINE RADIATIVO DI QUESTO VERTICE



- APPLICANDO LE REGOLE DI FERMION PER IL CALCOLO DI QUESTI CONTRIBUTI, SI TROVA CHE ESSI DIVERGONO (DA UNO ∞ COME RISULTATO) [N.B. la divergenza c'è anche nell'elettrodinamica classica: $U = \frac{e^2}{r}$ per $r \rightarrow 0$]

- LA "SOLUZIONE" DEL PROBLEMA È COMPLESSA, MA IN "SOLDONI" È LA SEGUENTE:

UN ELETTRONE NON INTERAGENTE POSSIÈDE UNA CARICA "NUDA" ED UNA MASSA "NUDA" ANCHE ESSE DI VALORE INFINITO.

L'INTERAZIONE "CORREGGE" QUESTI VALORI INFINITI E LI RIPORTA AI VALORI RISULTATI SPERIMENTALMENTE

$$\Rightarrow \infty - \infty = \text{VALORE FINITO}$$

- LA SOLUZIONE NON È ELEGANTE MA FUNZIONA!

MOMENTO MAGNETICO ANOMALO

- IL MOMENTO MAGNETICO DELL'ELETTRONE È PROPORZIONALE ALLO SPIN

$$\vec{\mu} = -g \frac{e}{2m} \vec{S}$$

- g È IL RAPPORTO GIROMAGNETICO, NELLA TEORIA DI DIRAC g È UGUALE A 2 (VALORE MISURATO), MEDIANTE CLASSICAMENTE SAREBBE DOVUTO ESSERE UGUALE A 1
- MISURE PIÙ PRECISE DADNO PER g UN VALORE LEGGERMENTE MAGGIORE DI 2 (ANOMALIA)
- DALLA QED, FACENDO LO SVILUPPO FINO AL TERZO ORDINE, RISULTA:

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)^{\text{elettrone}} = 0.5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) - 0.32848 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.19 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \dots$$

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)^{\text{muone}} = 0.5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + 0.76578 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 24.45 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \dots$$

RISULTATI ~ 2000

	ELETTRONE	MUONE
PREDETTO	$11\,586\,524 \pm 4 \cdot 10^{-10}$	$11\,659\,180 \pm 100 \cdot 10^{-10}$
MISURATO	$11\,586\,521.9 \pm 0.1 \cdot 10^{-10}$	$11\,659\,230 \pm 80 \cdot 10^{-10}$

N.B. SI PUÒ RISCALVERE LA CORREZIONE INTRODUCENDO UNA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO α EFFICACE

$$\frac{g-2}{2} = \frac{0.5}{\pi} \alpha_{\text{eff.}}$$

$$\alpha_{\text{eff.}}^{\text{muone}} > \alpha_{\text{eff.}}^{\text{elettrone}}$$

MORENTO

RAQUETICO

ANDRACO

diagrammi
fondamentali

CORREZIONI
AL PRIMO
ORDINE

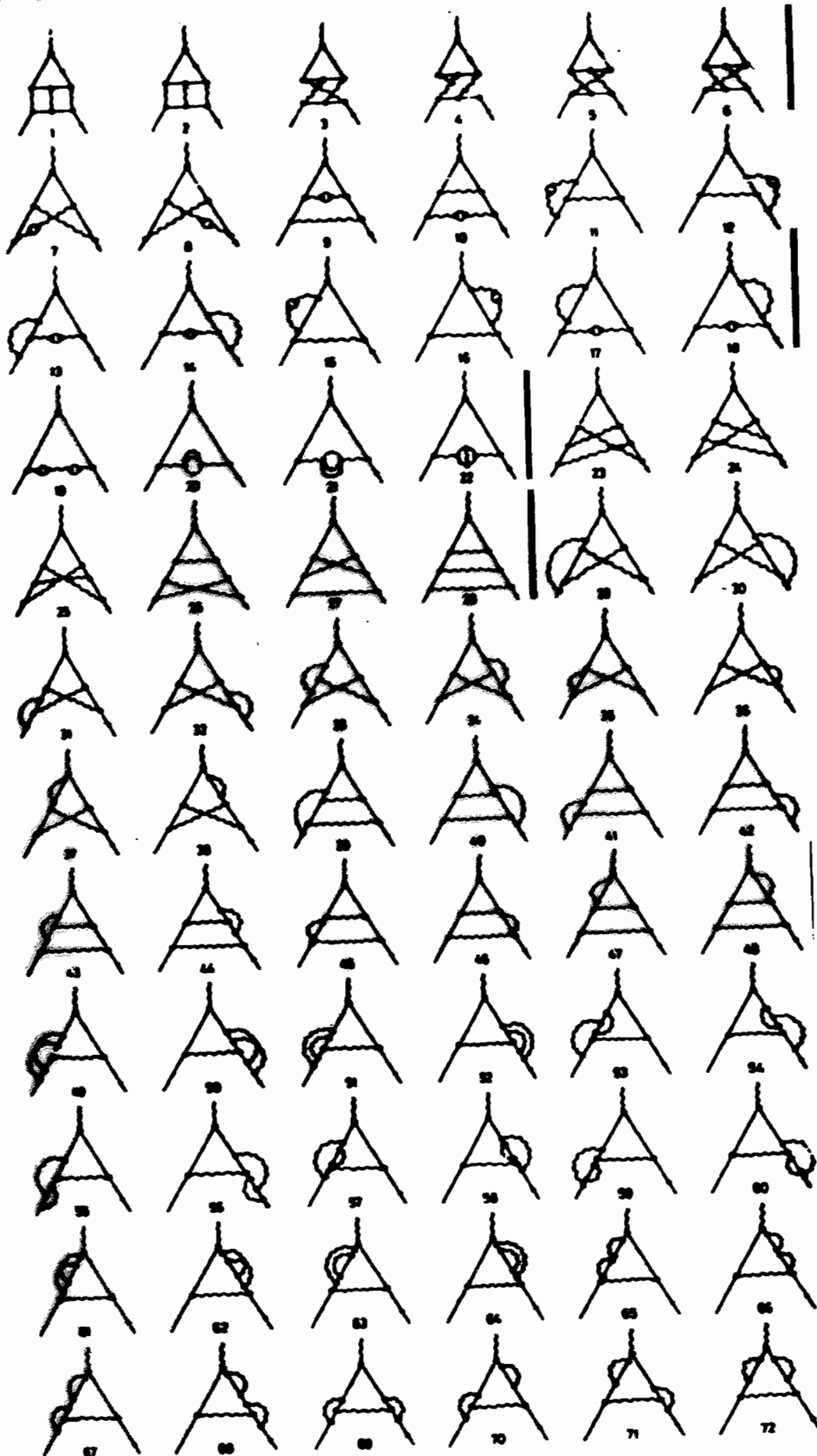
$$\left(\frac{g-2}{2}\right) =$$

$$0.5 \left(\frac{g}{\pi}\right) +$$

$$a \left(\frac{g}{\pi}\right)^2 +$$

$$b \left(\frac{g}{\pi}\right)^3 +$$

$$\dots$$

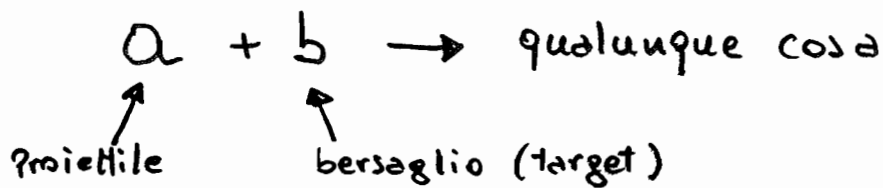


CORREZIONI DEL TERZO ORDINE

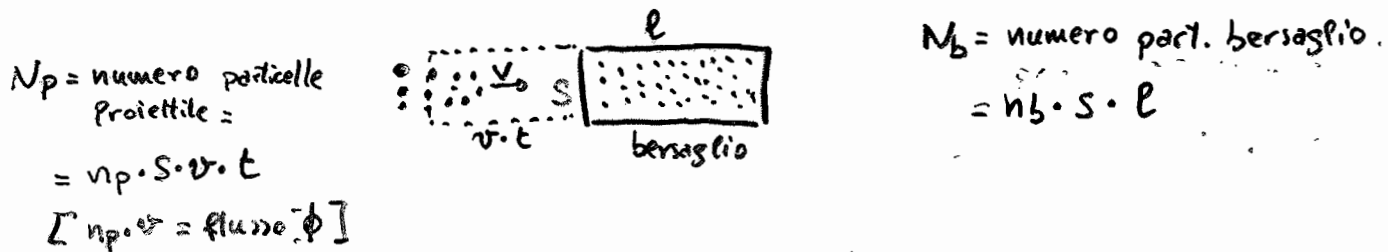
S MATRIX : WHAT FOR ?

- DA UN PUNTO DI VISTA SPERIMENTALE NOI MISURIAMO DUE COSE: SEZIONI D'URTO E VITE MEDIE

- SEZIONE D'URTO



LA SEZIONE D'URTO È LA MISURA DELLA PROBABILITÀ DI OCCORRENZA DI UN DATO PROCESSO



$$N_{\text{EVENTI}} = N_p \cdot N_b \cdot \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{N_{\text{EVENTI}}}{t} \cdot \frac{1}{n_p \cdot S \cdot v} \cdot \frac{1}{N_b}$$

$$\omega = \sigma \cdot \phi = \sigma \cdot n_p \cdot v \quad \text{probabilità di transizione per unità di area e per 1 sola particella bersaglio}$$

• VITA MEDIA

$a \rightarrow$ qualunque cosa

LA PARTICELLA a PUÒ DECADERE IN VARI MODI

$$N(t) = N(0) e^{-\Gamma_{\text{TOT}} t} \quad (\text{numero di particelle al tempo } t)$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{\text{TOT}}} \quad \text{vita media} \quad ; \quad \Gamma_{\text{TOT}} = \text{larghezza totale (probabilità di transizione)}$$

$$\Gamma_{\text{TOT}} = \sum_i \Gamma_i \quad \Gamma_i = \text{larghezza parziale}$$

$$B. R. = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{\text{TOT}}} = \text{rapporto di decadimento} \quad (= \frac{N_i}{N_{\text{TOT}}})$$

PROBABILITA' DI TRANSIZIONE

- PARTENDO DA UNO STATO $|i\rangle$ L'OPERATORE S PRODUCE LO STATO $S|i\rangle$, IL QUALE E' UNA SOVRAPPOSIZIONE DI TUTTI GLI STATI FINALI.

- L'AMPIEZZA DI PROBABILITA' DI TROVARE UN PARTICOLARE STATO FINALE $|f\rangle$ E' DATA DA:

$$S_{if} = \langle f | S | i \rangle = S_{if} + i (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \langle f | T | i \rangle$$

- PER AVERE LA PROBABILITA' DI TRANSIZIONE E' NECESSARIO PRENDERE IL MODULO QUADRO DEL SECONDO TERMINE

compere il fattore $(2\pi)^8 |\delta^4(p_f - p_i)|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) (2\pi)^4 \delta(0)$

Per $V \rightarrow \infty$ e $T \rightarrow \infty$; $(2\pi)^4 \delta(0) = VT$

$$\Rightarrow W_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |\langle f | T | i \rangle|^2 \cdot V \cdot T$$

- SI CONSIDERA LA PROBABILITA' DI TRANSIZIONE PER UNITA' DI TEMPO

N.B. SI NORMALIZZA ANCHE PER IL VOLUME V , MA OCCORRE FARE ATTENZIONE AL TIPO DI NORMALIZZAZIONE (1 particella per unite' di volume, 2? etc...)

- TRAMITE I DIAGRAMMI DI FEYNMAN, ED UTILIZZANDO LE GIUSTE NORMALIZZAZIONI PER ELIMINARE IL VOLUME V , SI CALCOLA L'ELEMENTO DI MATRICE T_{fi} , O CON UN'ALTRA TERMINOLOGIA M_{fi}

RÈGOLA D'ORO DI FERMI

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho(\epsilon)$$

↑
probabilità di
transizione per
unità di tempo

↑
elemento di
matrice

↑
spazio delle fasi

- L'AMPIEZZA M CONTIENE TUTTA L'INFORMAZIONE DINAMICA DEL PROCESSO
- LO SPAZIO DELLE FASI CONTIENE INVECE SOLO LE INFORMAZIONI CINEMATICHE DEL PROCESSO. ESSO DIPENDE DALLE MASSE, ENERGIE E IMPULSI DEI PARTECIPANTI, E RIFLETTE IL FATTO CHE UN PROCESSO È PIÙ FACILE CHE OCCORRA SE C'È PIÙ "SPAZIO PER MANOVRARE"
- AD ESEMPIO UNA PARTICELLA NON DECADE IN DUE PARTICELLE LA CUI SOMMA DELLE MASSE È MAGGIORE DELLA MASSA INIZIALE PERCHÉ NON C'È SPAZIO DELLE FASI.